

Agrandissement, réduction et échelles — cours de maths 4e

Une carte, une maquette, un plan d'architecte : trois façons de représenter en petit ce qui est grand. La règle est simple pour les longueurs — on multiplie par le même nombre. Elle l'est beaucoup moins pour les aires et les volumes, et c'est là que se joue tout le chapitre.

LE MOT DE 4E

Rapport k : toutes les longueurs sont multipliées par k

LA RÈGLE QUI SURPREND

Les aires par k^2 , les volumes par k^3

LE PIÈGE

Doubler les longueurs ne double pas l'aire : elle QUADRUPLE

À quoi ça sert : Agrandissement, réduction et échelles

L'échelle est le langage de tous ceux qui dessinent avant de construire. À La Réunion, la carte IGN au 1/25 000 est celle des randonneurs : 4 cm entre deux gîtes, et l'on sait qu'il y a 1 km à marcher. L'architecte travaille au 1/50 ou au 1/100, le cadastre au 1/2 000. Et la règle du k^2 se paie en vrai : un panneau deux fois plus long et deux fois plus haut ne demande pas deux pots de peinture de plus, mais quatre fois plus de peinture. Celle du k^3 explique pourquoi les grands animaux ont des pattes épaisses — le poids suit le volume, la résistance des os suit leur section.

Un peu d'histoire : Agrandissement, réduction et échelles

Les plans à l'échelle sont bien plus vieux que les mathématiques qui les justifient : on a retrouvé à Ninive, gravé vers 2100 avant notre ère, le plan d'une ville sumérienne avec ses distances. Mais c'est la Renaissance qui en fait une technique — les carnets de Villard de Honnecourt, au XIIIe siècle, puis les traités d'architecture italiens. Quant à l'effet sur les aires et les volumes, il a une conséquence célèbre : Galilée, dans les « Discours » de 1638, explique qu'un animal ne peut pas être agrandi indéfiniment, parce que son poids croît comme le cube quand la résistance de ses os croît comme le carré. C'est la première fois qu'un raisonnement de proportion explique une forme vivante.

Définition : Agrandissement, réduction et échelles

Un agrandissement de rapport k multiplie toutes les longueurs d'une figure par k , sans changer aucun angle : la forme est conservée. Si $k > 1$

Données	sur le plan	en vrai
	1 cm	250 m
	4 cm	1 km

c'est un agrandissement, si $k < 1$ c'est une réduction. Une échelle est exactement cela : l'échelle $\frac{1}{25\,000}$ d'une carte est une réduction de rapport $\frac{1}{25\,000}$, où 1 cm sur le papier représente 25 000 cm — soit 250 m — dans la réalité.

Données	sur le plan	en vrai
	10 cm	2,5 km

une carte IGN au 1/25 000

L'échelle relie DEUX mesures de la même longueur : celle du papier et celle du terrain. Le dénominateur dit de combien on a réduit.

Propriétés : Agrandissement, réduction et échelles

Le dénominateur dit de combien on réduit

Dans l'échelle $\frac{1}{d}$, le 1 est le plan et le d est la réalité, dans la MÊME unité. Au $\frac{1}{500}$, 1 cm vaut 500 cm, soit 5 m. ⚠ Contre-intuitif : plus le dénominateur est GRAND, moins la carte montre de détails — le $\frac{1}{100}$ montre un appartement, le $\frac{1}{100\,000}$ un département.

Données	échelle	1 cm vaut
	1/100	1 m
	1/25 000	250 m
	1/100 000	1 km

même centimètre, trois mondes

Du plan vers la réalité : on multiplie

La réalité est plus grande que le plan, donc on multiplie par le dénominateur. Au $\frac{1}{25\,000}$, 4 cm sur la carte donnent $4 \times 25\,000 = 100\,000$ cm, c'est-à-dire 1 km. ⚠ L'erreur n'est presque jamais la multiplication : c'est la conversion qui suit.

Données	sur le plan	en vrai
	4 cm	$\times 25\,000$
		100 000 cm
		1 km

au 1/25 000 : on multiplie, puis on convertit

4 cm sur la carte, c'est 1 km sur le terrain

De la réalité vers le plan : on divise

Le plan est plus petit, donc on divise. Une façade de 12 m dessinée au $\frac{1}{200}$: on convertit d'abord — $12\text{ m} = 1\,200\text{ cm}$ — puis on divise, $1\,200 \div 200 = 6\text{ cm}$. ⚠ Convertir AVANT de diviser : des mètres divisés par un dénominateur en centimètres ne veulent rien dire.

Données	sur le plan	en vrai
	?	12 m
		1 200 cm
	6 cm	$\div 200$

au 1/200 : on convertit, puis on divise

12 m en vrai, 6 cm sur le plan

Un rapport agrandi toutes les longueurs

Un agrandissement de rapport 3 multiplie la longueur par 3, la

Les aires sont multipliées par k^2

C'est le point qui coûte le plus cher de l'année, et il ne se retient pas : il

Les volumes sont multipliés par k^3

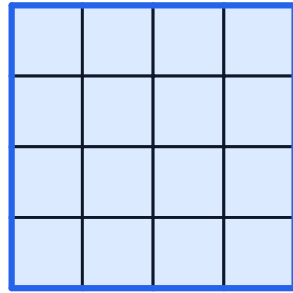
La même idée, une dimension plus haut : un volume est un produit de

largeur par 3, la hauteur par 3, et chaque diagonale par 3. Les ANGLES, eux, ne bougent pas — c'est ce qui fait que la figure garde sa forme. Une réduction est la même chose avec un rapport plus petit que 1 : réduire au $\frac{1}{4}$, c'est diviser par 4.

Données		me
	longueur	5
	largeur	4
	angles	

les longueurs changent, les angles non

se compte. Doublez le côté d'un carré, et le grand carré contient QUATRE petits — pas deux. La raison tient en une ligne : une aire est un produit de deux longueurs, et chacune a été multipliée par k , donc l'aire l'est par $k \times k$.



le carré de côté 2 tient QUATRE fois dans celui de côté 4

TROIS longueurs, donc il est multiplié par $k \times k \times k$. C'est pourquoi une maquette au $\frac{1}{10}$ ne contient pas un dixième du vrai réservoir, mais un MILLIÈME — et pourquoi une fourmi géante de cinéma s'effondrerait sous son propre poids.

Données	ce qu'on mesure	rap
	une longueur	
	une aire	
	un volume	

k, puis k^2 , puis k^3

La formule : Agrandissement, réduction et échelles

POUR UN AGRANDISSEMENT OU UNE RÉDUCTION DE RAPPORT K

longueurs $\times k$ · aires $\times k^2$ · volumes $\times k^3$

Une dimension de plus, un facteur k de plus. C'est la seule chose à retenir du chapitre — le reste s'en déduit, y compris les échelles, où k vaut 1/d.

Données	ce qu'on mesure	rapport 2	rapport 3
	une longueur	$\times 2$	$\times 3$
	une aire	$\times 4$	$\times 9$
	un volume	$\times 8$	$\times 27$

k, puis k^2 , puis k^3

Méthode : Agrandissement, réduction et échelles

1. Lire une échelle

On lit le dénominateur : c'est le nombre par lequel la réalité a été divisée. Pour savoir ce que vaut 1 cm, on le multiplie par ce

2. Passer d'une distance à l'autre

Une seule question à se poser : est-ce que je vais vers le PLUS GRAND ou vers le PLUS PETIT ? Vers la réalité, on multiplie ; vers le

3. Calculer avec un rapport

On identifie d'abord CE QU'ON MESURE. Une longueur, un périmètre, une diagonale ? On multiplie par k . Une aire, une

dénominateur, puis on convertit —
25 000 cm font 250 m.

plan, on divise. Et on convertit
toujours dans la même unité avant
de calculer.

Données	je pars de	je vais vers
	le plan	la réalité
	la réalité	le plan

la seule question : plus grand,
ou plus petit ?

surface à peindre ? Par k^2 . Un
volume, une contenance, une
masse ? Par k^3 . C'est la nature de
la grandeur qui décide, pas
l'énoncé.

Données	la grandeur	
	longueur, périmètre	
	aire, surface	
	volume, contenance	

c'est la grandeur qui décide

4. Retrouver le rapport

On divise une longueur de l'image
par la longueur correspondante du
modèle. ⚠ On DIVISE, on ne
soustrait pas : l'écart entre deux
figures semblables n'est pas
constant, le rapport si. Et si l'on ne
connaît que les aires, on remonte
par la racine carrée — une aire
multipliée par 9 vient d'un rapport 3.

Selon ce que l'on cherche : Agrandissement, réduction et échelles

On a une carte et on veut une distance

On mesure en centimètres, on
multiplie par le dénominateur, on
convertit. C'est le geste du
randonneur.

On doit faire tenir un plan sur une feuille

On divise la mesure réelle par la
place disponible : le résultat est le
dénominateur de l'échelle à choisir.

On agrandit et on veut une surface

Peinture, tissu, carrelage, papier
peint : ce sont des aires. Le facteur
est k^2 , jamais k .

On agrandit et on veut une contenance

Réservoir, bassin, emballage : ce sont des volumes. Le facteur est k^3
— une maquette au $\frac{1}{10}$ contient un millième.

Exemples corrigés : Agrandissement, réduction et échelles

Deux villages sur la carte

Sur une carte de La Réunion au $\frac{1}{25\,000}$, deux villages sont distants de 4 cm.

Quelle distance les sépare réellement ?

Données	sur le plan	en vrai
	4 cm	?
	$\times 25\,000$	100 000 cm
	on convertit	1 km

au 1/25 000, pas à pas

On va du plan vers la réalité, donc on multiplie : $4 \times 25\,000 = 100\,000$ cm. Il reste à convertir. 1 km vaut 100 000 cm, donc la distance est de 1 km. ⚠ Le calcul est facile, la conversion l'est moins : répondre 100 000 m au lieu de 100 000 cm donnerait 100 km — une erreur d'un facteur cent, et un randonneur perdu.

La maquette du réservoir

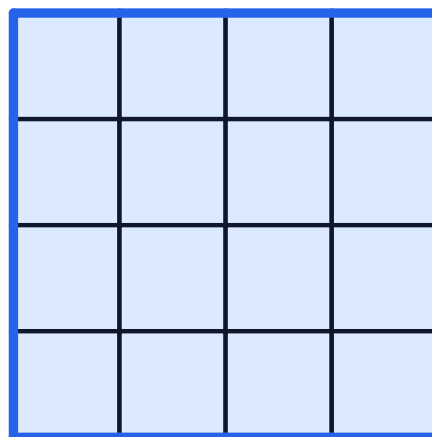
Une maquette de réservoir au $\frac{1}{10}$ contient 2 L.

Combien contient le vrai réservoir ?

Le panneau à repeindre

Il faut 3 pots de peinture pour un panneau. On en fait un second, deux fois plus long ET deux fois plus haut.

Combien de pots faut-il ?



deux fois plus long et haut : QUATRE fois la surface

La peinture se compte à l'AIRe, pas à la longueur. Les deux dimensions sont multipliées par 2, donc l'aire est multipliée par $2 \times 2 = 4$. Calcul : $3 \times 4 = 12$ pots. ⚠ Répondre 6 pots — 3×2 — c'est traiter une aire comme une longueur. Le dessin le dit sans calcul : le grand carré contient quatre petits.

Données	grandeur	rapport 10
	hauteur	$\times 10$
	surface	$\times 100$
	contenance	$\times 1\,000$

au 1/10, la contenance est au millième

« Au $\frac{1}{10}$ » porte sur les LONGUEURS : le vrai réservoir est 10 fois plus haut, 10 fois plus long, 10 fois plus large. Une contenance est un volume, donc elle est multipliée par $10^3 = 1\,000$. Calcul : $2 \times 1\,000 = 2\,000$ L. ⚠️ Répondre 20 L revient à traiter le volume comme une longueur. C'est la même erreur que pour la peinture, une dimension plus haut.

Pièges à éviter : Agrandissement, réduction et échelles

Croire qu'un grand dénominateur donne une carte détaillée. C'est l'inverse : le $\frac{1}{100}$ montre un appartement, le $\frac{1}{100\,000}$ un département.

Diviser des mètres par un dénominateur exprimé en centimètres. On convertit AVANT de calculer, jamais après.

Doubler les longueurs et doubler l'aire. L'aire est multipliée par $2^2 = 4$ — c'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Multiplier un volume par k au lieu de k^3 . Une maquette au $\frac{1}{10}$ contient un millième, pas un dixième.

Retrouver le rapport en soustrayant. On DIVISE une longueur de l'image par celle du modèle : l'écart ne se conserve pas, le rapport si.

Oublier que les angles ne changent pas. Un agrandissement conserve la forme — c'est même sa définition.

À retenir : Agrandissement, réduction et échelles

Un agrandissement de rapport k multiplie toutes les longueurs par k et ne change aucun angle.

Si $k > 1$ c'est un agrandissement, si $k < 1$ c'est une réduction. Une échelle $\frac{1}{d}$ est une réduction de rapport $\frac{1}{d}$.

Les AIRES sont multipliées par k^2 . Doubler les longueurs quadruple l'aire.

Les VOLUMES sont multipliés par k^3 . Doubler les longueurs multiplie le volume par 8.

Du plan vers la réalité : on MULTIPLIE par d . De la réalité vers le plan : on DIVISE par d .

On convertit toujours dans la même unité avant de calculer — c'est là que se logent les erreurs d'un facteur 100.

Exercices corrigés : Agrandissement, réduction et échelles

1. Sur une carte au $\frac{1}{50\,000}$, que représente 1 cm ?

Correction :

1 cm représente 50 000 cm. Or 50 000 cm = 500 m. Donc 1 cm vaut 500 m, soit un demi-kilomètre.

2. Sur un plan de quartier au $\frac{1}{1\,000}$, une rue mesure 8 cm. Quelle est sa longueur réelle ?

Correction :

$8 \times 1\,000 = 8\,000$ cm, soit 80 m.

3. Une façade de 15 m est dessinée au $\frac{1}{500}$. Quelle est sa longueur sur le plan ?

Correction :

On convertit d'abord : 15 m = 1 500 cm. Puis on divise : $1\,500 \div 500 = 3$ cm.

4. Deux maquettes du même bâtiment : la petite mesure 6 cm de haut, la grande 24 cm. Quel est le rapport d'agrandissement ?

Correction :

On divise : $24 \div 6 = 4$. Le rapport vaut 4. ⚠ $24 - 6 = 18$ serait l'écart, et l'écart ne se conserve pas d'une dimension à l'autre.

5. Une figure de 20 cm² est agrandie avec un rapport 3. Quelle est sa nouvelle aire ?

Correction :

L'aire est multipliée par $3^2 = 9$. Donc $20 \times 9 = 180$ cm². ⚠ $20 \times 3 = 60$ serait vrai pour une longueur, pas pour une aire.

6. L'aire d'une figure a été multipliée par 25. Par combien ses longueurs l'ont-elles été ?

Correction :

On remonte par la racine carrée : $5 \times 5 = 25$, donc les longueurs ont été multipliées par 5.

7. Un solide de 12 cm^3 est agrandi avec un rapport 2. Quel est son nouveau volume ?

Correction :

Le volume est multiplié par $2^3 = 8$. Donc $12 \times 8 = 96 \text{ cm}^3$.

8. Deux villes de La Réunion sont distantes de 20 km. Sur une carte, elles sont à 5 cm l'une de l'autre. Quelle est l'échelle de la carte ?

Correction :

On convertit : $20 \text{ km} = 2\,000\,000 \text{ cm}$. Puis on divise par la mesure du plan : $2\,000\,000 \div 5 = 400\,000$.
L'échelle est donc le $\frac{1}{400\,000}$.