

Les aires — cours de maths 4e

L'aire mesure la place qu'une figure occupe : combien de carreaux d'un centimètre de côté il faudrait pour la recouvrir entièrement. C'est une multiplication, pas une addition — et cela n'a rien à voir avec le périmètre, qui n'en mesure que le tour. Toutes les formules de cette fiche se déduisent d'une seule : celle du rectangle.

LE MOT CLÉ

La surface : la place occupée

LE GESTE

On multiplie deux longueurs

LA RÈGLE D'OR

Des cm^2 , jamais des cm

À quoi ça sert : les aires

L'aire est ce qu'on achète chaque fois qu'on recouvre : le carrelage d'une pièce, la peinture d'un mur, la pelouse d'un jardin, la tôle d'une toiture. Un pot de peinture n'annonce jamais des mètres, il annonce des mètres carrés. C'est aussi ce qui fixe le prix d'un terrain, vendu au m^2 et non au mètre de clôture — deux terrains de même périmètre ne valent pas le même prix. À l'échelle de l'île : La Réunion couvre environ $2\,500\text{ km}^2$, et c'est cette surface-là, et non la longueur de son littoral, qui dit combien de champs de canne, de forêt et de villes elle peut porter.

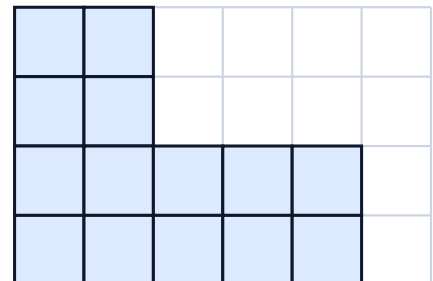
Un peu d'histoire : les aires

Les aires sont nées d'un problème très concret. Chaque année, la crue du Nil effaçait les limites des champs, et il fallait les redécouper équitablement : les arpenteurs égyptiens savaient donc calculer des surfaces bien avant qu'on parle de mathématiques. Le papyrus Rhind, vers 1650 avant notre ère, contient déjà ces calculs. Et le mot « géométrie » garde la trace de ce métier : du grec « gè », la terre, et « metron », la mesure — littéralement, la mesure de la terre.

Définition : les aires

L'aire d'une figure est la mesure de la surface qu'elle occupe. On la compte en unités carrées : un carré de 1 cm de côté a une aire de 1 cm^2 , et l'aire d'une figure est le nombre de tels carrés qu'il faut pour la recouvrir sans trou ni chevauchement. ⚠

C'est une grandeur différente du périmètre, et elle a sa propre unité : le cm^2 , jamais le cm. Deux figures



on ne compte plus le tour : on compte l'intérieur — 14 carreaux

peuvent avoir la même aire sans avoir le même périmètre, et l'inverse est vrai aussi.

C'est exactement la figure de la fiche des périmètres, avec l'autre question. Là-bas on suivait le contour et on trouvait 18. Ici on compte les carreaux : l'aire vaut 14 unités². Même dessin, deux nombres — c'est bien qu'il s'agit de deux grandeurs.

Propriétés : les aires

La surface, pas le contour

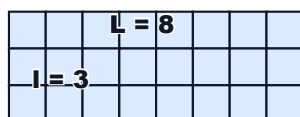
Sur un carré de 6 cm, le périmètre fait $4 \times 6 = 24$ cm et l'aire $6 \times 6 = 36$ cm². Deux calculs, deux nombres, deux unités. L'aire se multiplie, le périmètre s'additionne.

Données	un carré de 6 cm	périmètre
	ce qu'on mesure	le
	le calcul	4
	le résultat	24

deux nombres différents, et deux unités différentes

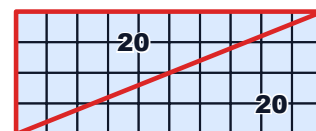
Compter, ou multiplier

Un rectangle de 8 sur 3, ce sont 3 rangées de 8 carreaux : $8 \times 3 = 24$ cm². On n'a pas besoin de les compter un par un — c'est tout l'intérêt de la formule $A = L \times l$. Pour le carré, $A = c^2$.



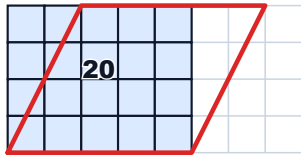
Le triangle est une moitié

Une diagonale coupe un rectangle en deux triangles superposables. Le rectangle de base 10 et de hauteur 4 vaut 40, donc chaque triangle vaut 20. C'est de là que vient la division par 2, et de nulle part ailleurs.



La hauteur, jamais le côté incliné

Le parallélogramme rouge a la même base et la même hauteur que le rectangle bleu : ce qui dépasse à droite est exactement ce qui manque à gauche. Son aire vaut donc base $\times$ hauteur, ici 20 — et le côté incliné n'y entre pas.



La formule : les aires

LES QUATRE AIRES À CONNAÎTRE

rectangle : $A = L \times l$ •

carré : $A = c^2$ •

parallélogramme : $A =$

$$b \times h \text{ • triangle : } A = \frac{b \times h}{2}$$

Les trois dernières se déduisent de la première. ⚠ Et si l'on double toutes les longueurs d'une figure, son aire est multipliée par 4 — alors que son périmètre, lui, ne l'est que par 2.

Méthode : les aires

1. Compter, si c'est quadrillé

Sur un quadrillage, l'aire est le nombre de carreaux — sans formule et sans risque d'erreur. Les demi-carreaux se recomposent deux par deux. C'est la méthode qui marche sur toutes les figures, même les plus tordues.

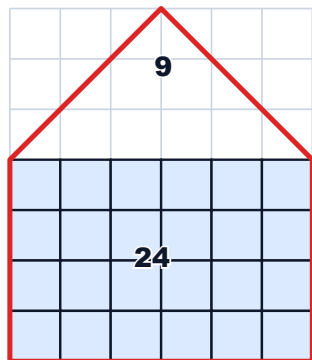
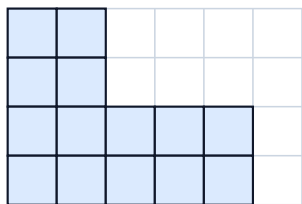
2. Découper en figures simples

Une figure composée se coupe en morceaux dont on connaît la formule, et on additionne. Ici : un rectangle de $6 \times 4 = 24$, surmonté d'un triangle de base 6 et de hauteur 3, soit $\frac{6 \times 3}{2} = 9$. Total : 33 cm^2 .

3. Vérifier l'unité

Une aire s'écrit toujours en unités carrées. Et attention aux conversions : 1 m^2 ne fait pas 100 cm^2 mais 10 000, parce qu'un mètre carré est un carré de 100 cm sur 100 cm.

		1	0	0
×		1	0	0
	1	0	0	0

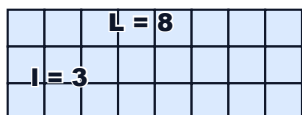


$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$$

Selon ce que l'on cherche : les aires

Carreler, peindre, semer

Une terrasse de 8 m sur 3 m fait 24 m^2 : c'est la quantité de carrelage à commander. Le périmètre, lui, ne servirait qu'à acheter la bordure.



Retrouver une dimension

L'aire peut être la donnée. Un rectangle de 36 cm^2 dont la longueur vaut 9 cm a une largeur de $36 \div 9 = 4 \text{ cm}$ — on défait la multiplication.

$$36 \div 9$$

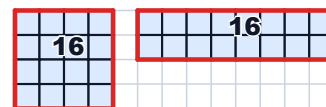
quotient : 4 reste : 0

Vérification :
dividende =
diviseur $\times$
quotient +
reste

aire 36 cm^2 ,
longueur 9 cm $\rightarrow$
largeur $36 \div 9$

Comparer deux formes

Deux figures très différentes peuvent occuper exactement la même surface. Un carré de 4 et un rectangle de 8 sur 2 valent tous deux 16 cm^2 — mais leurs tours mesurent 16 cm et 20 cm.

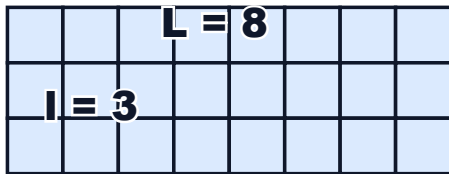


Exemples corrigés : les aires

L'aire d'un rectangle

Un rectangle mesure 8 cm de longueur et 3 cm de largeur.

Quelle est son aire ?

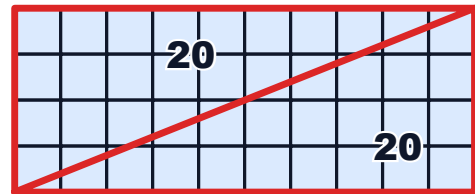


$A = L \times l = 8 \times 3 = 24 \text{ cm}^2$. Le quadrillage le confirme : il y a 3 rangées de 8 carreaux, donc 24 carreaux d'un centimètre carré chacun. ⚠ Le résultat s'écrit en cm^2 . Et il ne faut pas le confondre avec le périmètre du même rectangle, qui vaut 22 cm.

Pourquoi diviser par 2

Un triangle a une base de 10 cm et une hauteur de 4 cm.

Quelle est son aire, et d'où vient le « $\div 2$ » ?

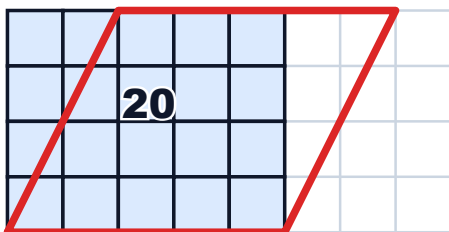


On trace le rectangle qui a la même base et la même hauteur : son aire vaut $10 \times 4 = 40 \text{ cm}^2$. La diagonale le coupe en deux triangles superposables, donc chacun vaut la moitié : $40 \div 2 = 20 \text{ cm}^2$. La formule $A = \frac{b \times h}{2}$ ne dit rien d'autre. ⚠ C'est exactement ce qu'oublie l'élève qui trouve 60 cm^2 pour une base de 10 et une hauteur de 6 : la bonne réponse est 30.

L'erreur du côté incliné

Un parallélogramme a une base de 5 cm, une hauteur de 4 cm, et son côté incliné mesure 5 cm.

Un élève calcule $5 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$. A-t-il raison ?



Non : il a utilisé le côté incliné au lieu de la hauteur. L'aire vaut $\text{base} \times \text{hauteur} = 5 \times 4 = 20 \text{ cm}^2$.
★ Le dessin le démontre : le rectangle bleu a la même base et la même hauteur que le parallélogramme, et le morceau qui dépasse à droite est exactement celui qui manque à gauche. Les deux

figures ont donc la même aire — 20 carreaux, qu'on peut compter. Le côté incliné, lui, est toujours plus long que la hauteur : le prendre gonflerait le résultat.

Pièges à éviter : les aires

Confondre aire et périmètre : un carré de 6 cm a une aire de 36 cm^2 et un périmètre de 24 cm. L'aire est la surface qu'on remplit, le périmètre la ficelle qui en fait le tour — et les unités le disent, cm^2 contre cm.

Oublier de diviser par 2 pour un triangle : une base de 10 et une hauteur de 6 donnent 30 cm^2 , et non 60. Le triangle est la MOITIÉ du rectangle qui l'entoure.

Prendre le côté incliné d'un parallélogramme au lieu de sa hauteur : la hauteur est la distance PERPENDICULAIRE entre la base et le côté opposé. Le côté incliné est toujours plus long, et il donnerait une aire trop grande.

À retenir : les aires

L'aire d'une figure est la surface qu'elle occupe. On la mesure en unités carrées — cm^2 , m^2 , km^2 — et on l'obtient en multipliant, jamais en additionnant des longueurs.

Rectangle : $L \times l$. Carré : c^2 . Parallélogramme : base $\times$ hauteur. Triangle : la moitié, donc $(\text{base} \times \text{hauteur}) \div 2$.

Une figure composée se DÉCOUPE en figures simples dont on additionne les aires — ou dont on soustrait, si l'on a enlevé un morceau.

Exercices corrigés : les aires

1. L'aire d'une figure correspond à quoi, et dans quelle unité s'exprime-t-elle ?

Correction :

À la surface qu'elle occupe, c'est-à-dire au nombre de carrés unités nécessaires pour la recouvrir. Elle s'exprime en unités carrées : cm^2 , m^2 , km^2 . ⚠ Pas en cm, qui est l'unité du périmètre.

2. Calculer l'aire d'un rectangle de longueur 8 cm et de largeur 3 cm.

Correction :

$8 \times 3 = 24 \text{ cm}^2$. On multiplie la longueur par la largeur, parce que la figure contient 3 rangées de 8 carreaux.

3. Un carré a une aire de 81 cm^2 . Quel est son côté ?

Correction :

9 cm, car $9 \times 9 = 81$. On cherche le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 81 — c'est l'opération inverse de $A = c^2$.

4. Calculer l'aire d'un triangle de base 10 cm et de hauteur 4 cm.

Correction :

$\frac{10 \times 4}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}^2$. ⚠ La réponse 40 oublie de diviser par 2 : le triangle est la moitié du rectangle de mêmes base et hauteur.

5. Calculer l'aire d'un parallélogramme de base 8 cm et de hauteur 5 cm.

Correction :

$8 \times 5 = 40 \text{ cm}^2$. On n'utilise NI le côté incliné, NI une division par 2 : la formule est simplement base $\times$ hauteur, comme pour un rectangle.

6. Une figure est formée d'un rectangle de 6 cm sur 4 cm surmonté d'un triangle de base 6 cm et de hauteur 3 cm. Quelle est l'aire totale ?

Correction :

On découpe et on additionne : le rectangle vaut $6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$, le triangle $\frac{6 \times 3}{2} = 9 \text{ cm}^2$. Total : 33 cm^2 .

7. Deux figures différentes peuvent-elles avoir la même aire ?

Correction :

Oui. Un carré de 4 cm de côté et un rectangle de 8 cm sur 2 cm occupent tous deux 16 cm^2 , alors que leurs périmètres valent 16 cm et 20 cm. L'aire ne détermine pas la forme — pas plus que le périmètre ne détermine l'aire.