

Aires : triangle, disque et figures composées

cours et exercices corrigés de maths 3e

Combien de carreaux faut-il pour couvrir cette terrasse ? La question porte sur une SURFACE, et la réponse se compte en mètres carrés — pas en mètres. C'est toute la différence avec le périmètre, qui mesure le tour. La troisième ajoute deux outils : l'aire du disque, et une règle qui surprend presque tout le monde — agrandir une figure deux fois n'en double pas l'aire, il la quadruple.

CE QUE C'EST

La mesure de la SURFACE couverte

LE DISQUE

πr^2 — et r est le rayon, pas le diamètre

LE PIÈGE

Agrandir de k multiplie l'aire par k^2 , pas par k

À quoi ça sert : Aires : triangle, disque et figures composées

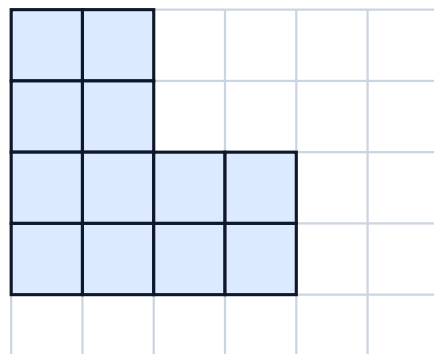
L'aire est ce qu'on achète au mètre carré : le carrelage d'une pièce, la peinture d'un mur, la tôle d'une toiture, le gazon d'un terrain. Et la règle du k^2 a des conséquences très concrètes qu'on sous-estime toujours : agrandir une terrasse de 3 m sur 4 m en une terrasse de 6 m sur 8 m ne double pas la facture de carrelage, elle la QUADRUPLE. C'est aussi ce qui explique qu'un logement deux fois plus long et deux fois plus large ne coûte pas deux fois plus cher à chauffer ou à couvrir. À La Réunion, la même règle décide du prix d'une bâche de protection ou d'une couverture de bassin.

Un peu d'histoire : Aires : triangle, disque et figures composées

Calculer l'aire d'un disque était un problème redoutable avant le calcul intégral, car un disque n'a aucun côté droit. Archimède le résout vers 250 avant notre ère par une idée d'une élégance rare : il démontre que l'aire du disque est égale à celle d'un TRIANGLE dont la base serait la longueur du cercle et la hauteur le rayon. Ce triangle a pour aire $\frac{2\pi r \times r}{2}$, c'est-à-dire πr^2 — la formule que nous employons encore. Le tour de force est d'avoir ramené une figure courbe à une figure droite, en découpant mentalement le disque en une infinité de secteurs redressés côte à côte.

Définition : Aires : triangle, disque et figures composées

L'aire d'une figure est la mesure de la surface qu'elle occupe, c'est-à-dire le nombre d'unités de surface qu'il faut pour la recouvrir entièrement. Elle s'exprime en unités CARRÉES : des centimètres carrés si les longueurs sont en centimètres. C'est ce qui la distingue du périmètre, qui mesure une longueur et s'exprime en centimètres. Une même figure a donc les deux, et elles ne se déduisent pas l'une de l'autre.



Douze cases coloriées : l'aire vaut 12 unités. Ce sont les cases qu'on compte, et non le trait qui en fait le tour — celui-là donnerait le périmètre.

Propriétés : Aires : triangle, disque et figures composées

Une surface, et donc une unité carrée

L'aire se recouvre, le périmètre se parcourt. La conséquence pratique est l'UNITÉ : une aire s'exprime en cm^2 , m^2 ou km^2 , jamais en cm. Un résultat annoncé en centimètres pour une aire signale à coup sûr qu'on a calculé le contour. Pour un rectangle, l'aire est le produit des deux dimensions : $L \times l$ — et c'est justement ce produit qu'on écrit à tort quand on cherche un périmètre.

on mesure	on calcule	unité
l'aire	$L \times l$	cm^2
le périmètre	$2 \times (L + l)$	cm
8 sur 5	40 ou 26	selon

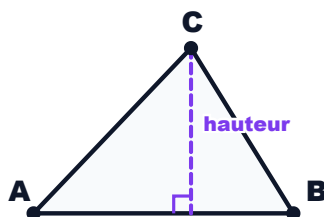
l'unité tranche à elle seule

Pour un rectangle de 8 sur 5 : aire 40 cm^2 , périmètre 26 cm.

Le triangle : la hauteur est perpendiculaire à la base

L'aire d'un triangle vaut $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$. Deux précautions font toute la difficulté.

D'abord la hauteur doit être ASSOCIÉE à la base choisie : c'est le segment perpendiculaire à cette base, issu du sommet opposé — jamais un côté oblique. Ensuite il ne faut pas oublier de diviser par 2 : le triangle est la moitié d'un rectangle de mêmes base et hauteur.



La hauteur tombe à angle droit sur la base : c'est elle qui entre dans la formule, pas le côté.

Le disque : πr^2 , et r est bien le rayon

L'aire d'un disque vaut πr^2 . —

L'erreur la plus fréquente n'est pas d'oublier la formule mais de s'être trompé de donnée : quand l'énoncé fournit le DIAMÈTRE, il faut d'abord le diviser par 2. Pour un diamètre de 10 cm, le rayon vaut 5 et l'aire $\pi \times 25 \approx 78,5 \text{ cm}^2$ — employer 10 directement donnerait 314 cm^2 , soit quatre fois trop, puisque le rayon est élevé au carré.



C'est la surface coloriée qu'on mesure : πr^2 , en centimètres carrés.

Cercle ou disque : la même figure, deux mesures

Le cercle est une LIGNE — le bord — et sa longueur vaut $2\pi r$, en centimètres. Le disque est la SURFACE pleine qu'elle entoure, et son aire vaut πr^2 , en centimètres carrés. Le repère le plus sûr est le carré dans la formule : r^2 ne peut donner qu'une surface, car deux longueurs y sont multipliées entre elles.

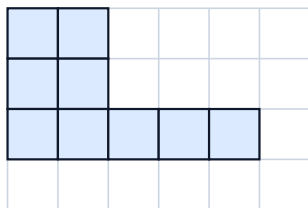
objet	ce qu'on mesure	formule
le cercle	sa longueur	$2\pi r$
le disque	son aire	πr^2

le carré annonce la surface

Un résultat en cm^2 ne peut pas être un périmètre, et réciproquement.

Une figure composée SE DÉCOUPE

Contrairement au périmètre, l'aire se calcule très bien en morceaux : on découpe la figure en formes usuelles, on calcule chaque aire, et on additionne. Le trait de découpe ne pose ici aucun problème, puisqu'il ne fait pas partie de la surface — il la sépare seulement. C'est la méthode générale, et elle ne rate jamais.



Un carré de 4 cases et un rectangle de 5 : l'aire totale vaut 9 unités.

Où se soustrait, quand un morceau manque

Quand une figure est un grand rectangle dont on a retiré un morceau — une découpe, un trou —, on calcule l'aire du tout, puis on retranche celle du morceau enlevé. Dans un rectangle de 12×8 où l'on découpe un carré de côté 3, il reste $96 - 9 = 87 \text{ cm}^2$.

Additionner ou soustraire : c'est la même méthode, elle suit simplement le sens du découpage.

la figure	le calcul	aire
le rectangle	12×8	96
le carré ôté	3×3	9
ce qui reste	$96 - 9$	87

en cm^2

On mesure toujours des morceaux entiers, jamais la forme irrégulière directement.

Agrandir de k multiplie l'aire par k^2

C'est la règle la plus contre-intuitive du chapitre. Si l'on multiplie toutes les longueurs d'une figure par k , son aire est multipliée non par k , mais par k^2 . La raison tient en une ligne : une aire est un produit de DEUX longueurs, et chacune est multipliée par k . Doubler les côtés d'un carré quadruple donc son aire, et les tripler la multiplie par 9.

on multiplie les longueurs par	l'aire par
2	4
3	9
0,5	0,25
k	k^2

deux longueurs, donc un carré

Réduire de moitié ne divise pas l'aire par 2, mais par 4.

Trois dimensions, trois exposants

La règle se généralise, et c'est elle qu'il faut retenir plutôt que trois cas séparés. Agrandir dans un rapport k multiplie une LONGUEUR par k , une AIRE par k^2 , et un VOLUME par k^3 . L'exposant est simplement le nombre de longueurs multipliées entre elles : une pour un périmètre, deux pour une aire, trois pour un volume.

la grandeur	combien de longueurs
un périmètre	une
une aire	deux
un volume	trois

l'exposant compte les dimensions

Une seule idée à retenir, et les trois cas s'en déduisent.

La formule : Aires : triangle, disque et figures composées

LES AIRES DES FIGURES USUELLES

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{rect.}} &= L \times l \\ \mathcal{A}_{\text{triangle}} &= \frac{b \times h}{2} \\ \mathcal{A}_{\text{disque}} &= \pi r^2 \end{aligned}$$

⚠ Chacune multiplie exactement DEUX longueurs, ce qui explique à la fois l'unité carrée et la règle du k^2 . Dans la formule du disque, le carré porte sur le rayon seul : πr^2 ne se lit pas $(\pi r)^2$.

figure	aire	attention à
rectangle	$L \times l$	—
triangle	$b \times h \div 2$	le $\div 2$
disque	πr^2	le rayon

deux longueurs à chaque fois

Les deux erreurs les plus fréquentes sont le $\div 2$ oublié et le diamètre pris pour un rayon.

Méthode : Aires : triangle, disque et figures composées

1. Se demander d'abord : surface ou contour ?

Carreler, peindre, semer, couvrir : c'est une aire. Clôturer, border, entourer : c'est un périmètre. L'unité attendue confirme, et il suffit de la regarder avant de commencer.

2. Pour un triangle : repérer la hauteur AVANT de calculer

On choisit une base, puis on cherche le segment perpendiculaire issu du sommet opposé. — Un côté oblique n'est pas une hauteur, même s'il en a l'air. Et le $\div 2$ s'écrit dès la première ligne, pour ne pas l'oublier en route.

3. Pour un disque : d'abord le rayon

Si l'énoncé donne le diamètre, on écrit $r = d \div 2$ AVANT toute chose, sur une ligne séparée. C'est trois secondes, et cela évite l'erreur d'un facteur 4 — car le rayon est ensuite élevé au carré.

4. Pour une figure composée : découper en formes connues

On repère des rectangles, des triangles, des demi-disques. On calcule chaque aire séparément, puis on additionne — ou on soustrait si un morceau a été retiré. Un schéma annoté du découpage vaut mieux qu'un long raisonnement.

5. Devant un agrandissement : penser au carré

Multiplier les longueurs par k multiplie l'aire par k^2 . Le réflexe consiste à écrire le carré tout de suite : un rapport de 3 donne 9, un rapport de 0,5 donne 0,25. Répondre avec k seul est l'erreur attendue par l'énoncé.

Selon ce que l'on cherche : Aires : triangle, disque et figures composées

La figure est un rectangle ou un carré

Je multiplie les deux dimensions. Le résultat est en unités carrées.

La figure est un triangle

Je repère la hauteur associée à la base choisie, je multiplie, puis je divise par 2.

La figure contient un disque

Je m'assure d'avoir le rayon — en divisant le diamètre par 2 si besoin — puis j'applique πr^2 .

La figure est composée

Je la découpe en formes usuelles, et j'additionne les aires. Si un morceau a été retiré, je soustrais.

On agrandit ou on réduit la figure

Je multiplie l'aire par k^2 , jamais par k . Un volume, lui, serait multiplié par k^3 .

Exemples corrigés : Aires : triangle, disque et figures

composées

Le triangle et son demi

Un triangle a une base de 8 cm et une hauteur associée de 5 cm.

Quelle est son aire ?

On applique la formule en écrivant le $\div 2$ dès le départ : $\mathcal{A} = \frac{8 \times 5}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ cm}^2$.  Répondre 40 est l'erreur que la banque interroge deux fois : 8×5 donne l'aire du RECTANGLE de mêmes base et hauteur, et le triangle n'en est que la moitié. Le contrôle visuel est immédiat — un triangle inscrit dans un rectangle en occupe manifestement la moitié.

Le disque, à partir du diamètre

Un disque a un diamètre de 10 cm. On prendra $\pi \approx 3,14$.

Quelle est son aire ?

étape	calcul	résultat
le rayon	$10 \div 2$	5 cm
l'aire	$3,14 \times 25$	78,5 cm ²
si on garde 10	$3,14 \times 100$	314 : faux

l'erreur est d'un facteur 4

Le rayon d'abord, la formule ensuite.

On écrit d'abord le rayon, sur sa propre ligne : $r = 10 \div 2 = 5 \text{ cm}$. Puis $\mathcal{A} = \pi r^2 = 3,14 \times 25 = 78,5 \text{ cm}^2$.  Employer 10 directement donnerait $3,14 \times 100 = 314 \text{ cm}^2$, soit QUATRE fois trop — et non deux, puisque l'erreur porte sur un nombre qu'on élève ensuite au carré. C'est la raison pour laquelle cette étape mérite une ligne à elle seule.

La plaque percée

Dans une plaque rectangulaire de 12 cm sur 8 cm, on découpe un carré de côté 3 cm.

Quelle est l'aire de la plaque restante ?

On calcule l'aire du rectangle entier : $12 \times 8 = 96$ cm². Puis celle du carré retiré : $3 \times 3 = 9$ cm². Il reste $96 - 9 = 87$ cm². ★ On n'essaie jamais de mesurer directement une forme irrégulière : on la ramène toujours à des morceaux usuels, qu'on additionne ou qu'on soustrait selon le sens du découpage.

La terrasse agrandie

Une terrasse mesure 3 m sur 4 m. On décide de doubler ses deux dimensions.

L'aire est-elle doublée ?

terrasse	dimensions	aire
avant	3×4	12 m ²
après	6×8	48 m ²
rapport	$\times 2$ sur les côtés	$\times 4$

$$k = 2, \text{ donc } k^2 = 4$$

Deux longueurs doublées : le produit est multiplié par quatre.

Non, elle est QUADRUPLÉE. L'aire de départ vaut $3 \times 4 = 12$ m². Après agrandissement, la terrasse mesure 6 m sur 8 m, soit 48 m². Le rapport vaut bien $48 \div 12 = 4$, c'est-à-dire k^2 avec $k = 2$. La raison se dit en une phrase : une aire est le produit de DEUX longueurs, et chacune a été doublée. Conséquence très concrète — la facture de carrelage est multipliée par 4, pas par 2.

Pièges à éviter : Aires : triangle, disque et figures composées

Oublier de diviser par 2 dans l'aire d'un triangle : $8 \times 5 = 40$ est l'aire du rectangle, pas du triangle, qui vaut 20.

Prendre un côté oblique pour la hauteur. La hauteur est perpendiculaire à la base, et issue du sommet opposé.

Utiliser le diamètre à la place du rayon dans πr^2 : l'erreur est d'un facteur 4, puisque le rayon est élevé au carré.

Employer $2\pi r$ pour une aire. Cette formule donne la longueur du cercle, en cm ; l'aire du disque vaut πr^2 , en cm².

Exprimer une aire en cm. Une surface se mesure en unités carrées, toujours.

Croire qu'agrandir de k multiplie l'aire par k . C'est k^2 : doubler les côtés quadruple l'aire.

Vouloir mesurer directement une figure irrégulière. On la découpe en formes usuelles, et l'on additionne ou soustrait.

À retenir : Aires : triangle, disque et figures composées

L'aire mesure une surface : elle s'exprime en cm^2 , jamais en cm .

Rectangle : $L \times l$. Triangle : $\frac{b \times h}{2}$, hauteur perpendiculaire à la base.

Disque : πr^2 , et r est le RAYON — pas le diamètre.

Le cercle est une ligne ($2\pi r$), le disque une surface (πr^2).

Une figure composée se découpe : on additionne, ou l'on soustrait un morceau ôté.

Agrandir dans un rapport k multiplie l'aire par k^2 .

Une longueur suit k , une aire k^2 , un volume k^3 : l'exposant compte les dimensions.

Exercices corrigés : Aires : triangle, disque et figures composées

1. Quelle unité convient pour exprimer une aire, si les longueurs sont en mètres ?

Correction :

Le mètre carré (m^2). Une aire est le produit de deux longueurs, donc son unité est une unité carrée.

2. Quelle est l'aire d'un rectangle de 9 cm sur 4 cm ?

Correction :

$9 \times 4 = 36 \text{ cm}^2$. Son périmètre, lui, vaudrait $2 \times (9 + 4) = 26 \text{ cm}$.

3. Un triangle a une base de 12 cm et une hauteur associée de 7 cm. Quelle est son aire ?

Correction :

$$\frac{12 \times 7}{2} = \frac{84}{2} = 42 \text{ cm}^2.$$

4. Pour calculer l'aire d'un triangle, peut-on utiliser n'importe quel côté avec n'importe quelle hauteur ?

Correction :

Non. La hauteur doit être celle ASSOCIÉE à la base choisie, c'est-à-dire le segment perpendiculaire à cette base issu du sommet opposé. Les trois couples base-hauteur donnent la même aire, mais on ne les mélange pas.

5. Quelle est la formule de l'aire d'un disque de rayon r ?

Correction :

πr^2 . Le carré porte sur le rayon seul, et le résultat s'exprime en unités carrées.

6. Un disque a un diamètre de 10 cm. Un élève utilise directement $r = 10$ dans πr^2 . A-t-il raison ?

Correction :

Non : le rayon vaut $10 \div 2 = 5$. Son aire est $\pi \times 25 \approx 78,5 \text{ cm}^2$, et non $\pi \times 100 \approx 314 \text{ cm}^2$. L'erreur est d'un facteur 4.

7. Une figure en L se décompose en deux rectangles d'aires 24 cm^2 et 15 cm^2 . Quelle est son aire totale ?

Correction :

$24 + 15 = 39 \text{ cm}^2$. Contrairement au périmètre, l'aire s'additionne morceau par morceau : le trait de découpe ne fait pas partie de la surface.

8. Dans un rectangle de 10 cm sur 6 cm, on découpe un carré de côté 4 cm. Quelle est l'aire restante ?

Correction :

$10 \times 6 = 60 \text{ cm}^2$, moins $4 \times 4 = 16 \text{ cm}^2$: il reste 44 cm^2 .

9. On double les côtés d'un carré. Son aire est multipliée par combien ?

Correction :

Par 4. Une aire est le produit de deux longueurs, et chacune a été doublée : $2 \times 2 = 4$. Un carré de côté 3 a une aire de 9 ; de côté 6, une aire de 36.

10. Une figure a une aire de 20 cm^2 . On agrandit ses longueurs dans un rapport 3. Quelle est la nouvelle aire ?

Correction :

L'aire est multipliée par $k^2 = 9$, donc elle vaut $20 \times 9 = 180 \text{ cm}^2$. Répondre 60 reviendrait à multiplier par k , ce qui vaut pour une longueur, pas pour une aire.