

Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

cours et exercices corrigés de maths 3e

Au marché, un fruit coûte 3 € et vous en prenez x : le total s'écrit $3x$, sans qu'on ait besoin de savoir combien vous en achetez. C'est tout l'intérêt d'une lettre — elle permet de calculer AVANT de connaître le nombre. En troisième, les gestes de quatrième se consolident, et deux choses s'ajoutent : la double distributivité, qui fait se rencontrer deux parenthèses, et une égalité — $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ — sans laquelle certaines expressions ne se factoriseraient pas du tout.

LES TROIS VERBES

Développer enlève les parenthèses • **Réduire** regroupe • **Factoriser** les remet

L'OUTIL NEUF DE LA 3E

La double distributivité — et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

LE PIÈGE

$3x + 2$ **ne se réduit pas** : x et 1 **ne sont pas de même nature**

À quoi ça sert : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

Toute formule de tarif, d'aire ou de programme est une expression littérale. Au marché de Saint-Paul, x fruits à 3 € font $3x$ euros, et l'écriture vaut pour un client comme pour cent. Mais l'usage le plus quotidien est ailleurs : dans un tableur, une case qui contient une formule EST une expression littérale, et les autres cases lui donnent ses lettres. Développer et factoriser servent alors très concrètement — une expression factorisée se calcule souvent en moins d'opérations, et c'est ce qui rend un tableau rapide plutôt que lent.

Un peu d'histoire : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

L'habitude de noter les inconnues par les dernières lettres de l'alphabet — x, y, z — et les nombres connus par les premières — a, b, c — vient de René Descartes, en 1637, dans « La Géométrie ». Elle n'a rien d'évident : avant lui, les mathématiciens écrivaient leurs équations en phrases, et un problème du second degré tenait en un paragraphe. Le calcul littéral n'a pas rendu les mathématiques plus difficiles, il les a rendues COURTES — et c'est en devenant courtes qu'elles sont devenues manipulables.

Définition : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

Une expression littérale est un calcul où une ou plusieurs lettres remplacent des nombres inconnus ou variables. L'écriture $3x$ signifie $3 \times x$ — le signe de multiplication est sous-entendu, et lui seul. Trois gestes s'appliquent à une telle expression :

DÉVELOPPER, c'est-à-dire transformer un produit en somme ; **RÉDUIRE**, regrouper ce qui est de même nature ; **FACTORISER**, transformer une somme en produit. Développer et factoriser sont exactement inverses l'un de l'autre. Un carré n'est pas un cas à part : $(x + 3)^2$ EST le produit $(x + 3)(x + 3)$, et se développe comme n'importe quel autre.

SITUATION CONCRÈTE



je modélise

ÉCRITURE ALGÈBRE

$$3x + 5$$

Trois boîtes identiques, et cinq margouillats dehors.

Chaque boîte contient le même nombre de margouillats, appelé x . Le total s'écrit $3x + 5$ — et cette écriture est juste quel que soit ce nombre.

Propriétés : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

La lettre cache un nombre, et la multiplication est sous-entendue

Dans $3x + 5$, la lettre x désigne un nombre qu'on ne connaît pas encore, ou qui peut changer.

L'absence de signe entre le 3 et le x signifie une MULTIPLICATION : $3x = 3 \times x$. C'est la source de la toute première erreur du chapitre, car rien à l'écrit ne distingue « trois fois » de « trois plus ».

on écrit	cela veut dire
$3x$	$3 \times x$
x^2	$x \times x$
$3 + x$	3 plus x

le signe absent est un $\times$

Aucun signe entre un nombre et une lettre : c'est toujours une multiplication.

Remplacer une lettre : les parenthèses ne sont pas facultatives

Calculer la valeur d'une expression, c'est remplacer la lettre par un nombre, puis calculer en respectant les priorités. Si le nombre est négatif, il s'écrit ENTRE

PARENTHÈSES : pour $2a - 5$ avec $a = -3$, on écrit $2 \times (-3) - 5 = -6 - 5 = -11$.

Sans les parenthèses, l'écriture 2×-3 n'a pas de sens et le signe se perd.

expression	pour	valeur
$3x + 2$	$x = 4$	14
$2a - 5$	$a = -3$	-11
$4(x + 1)$	$x = 2$	16

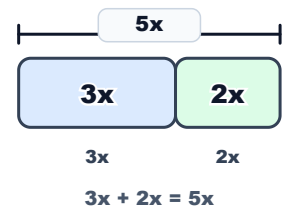
on remplace, puis on calcule

La lettre disparaît, un nombre prend sa place — et le résultat dépend de ce nombre.

Réduire : on n'additionne que ce qui est de même nature

Deux termes sont semblables lorsqu'ils portent la MÊME lettre à la MÊME puissance. On peut alors ajouter leurs coefficients : $3x + 2x = 5x$. En revanche $3x + 2$ ne se réduit pas, car un x et une unité ne sont pas de même nature — pas plus que $2x$ et $3x^2$.

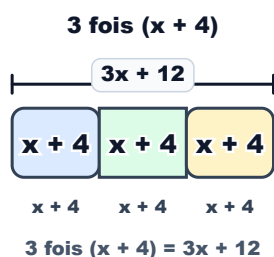
$3x + 2x$ se regroupe



Trois longueurs x plus deux longueurs x font cinq longueurs x .

Développer : chaque terme de l'intérieur, une fois chacun

Développer $3(x + 4)$, c'est multiplier le 3 par CHAQUE terme entre parenthèses : $3 \times x + 3 \times 4 = 3x + 12$. Oublier le second terme est l'erreur la plus fréquente du chapitre. C'est la distributivité SIMPLE : un seul facteur, une seule parenthèse.



Le 3 s'applique au paquet entier, donc à ses deux morceaux.

La double distributivité, et les carrés

Quand DEUX parenthèses se multiplient, chaque terme de la première rencontre chaque terme de la seconde : $(2x + 1)(x + 3)$ donne exactement quatre produits — $2x^2$, $6x$, x et 3 — que l'on réduit en $2x^2 + 7x + 3$. Un carré se traite pareil, car $(x + 3)^2$ signifie $(x + 3)(x + 3)$: quatre produits encore, dont deux identiques, d'où $x^2 + 6x + 9$. Écrire le produit en entier avant de calculer est le seul moyen sûr de ne pas perdre le terme du milieu.

x	x	+ 3
x	x^2	$3x$
+ 3	$3x$	9

$(x + 3)^2$: quatre cases

Les deux cases $3x$ se regroupent : c'est de là que vient le $6x$ que l'on oublie.

Factoriser : reconnaître ce qui est commun

Factoriser, c'est le chemin inverse : on cherche un facteur présent dans TOUS les termes et on le met devant une parenthèse. Dans $3x + 12$, le 3 est commun — car $12 = 3 \times 4$ — donc $3x + 12 = 3(x + 4)$. Dans $5x^2 + 3x$, c'est le x qui est commun : $x(5x + 3)$.

somme	commun	pro
$3x + 12$	3	$3(x + 4)$
$5x + 10$	5	$5(x + 2)$
$5x^2 + 3x$	x	$x(5x + 3)$

de la somme au produit

Le contrôle est immédiat : en développant, on doit retomber sur la somme de départ.

La différence de deux carrés

Une égalité mérite d'être connue par cœur, parce qu'elle seule permet de factoriser une expression qui n'a AUCUN facteur commun : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. On la vérifie en développant $a^2 - ab + ab - b^2$ où les deux termes du milieu s'annulent, ce qui explique qu'il n'en reste aucun. Lue de gauche à droite elle développe ; lue de droite à gauche elle factorise, et c'est ce second sens qui sert le plus.

à factoriser	on reconnaît
$x^2 - 36$	$x^2 - 6^2$
$x^2 - 49$	$x^2 - 7^2$
$x^2 + 36$	une SOMME

une différence, jamais une somme

Une différence de deux carrés se factorise toujours ; une somme de deux carrés, jamais.

Trois verbes, trois directions

Développer transforme un PRODUIT en SOMME. Factoriser fait l'inverse, d'une somme vers un produit. Réduire ne change pas de sens : il range, en regroupant les termes semblables, et accompagne le plus souvent un développement. Savoir lequel l'énoncé demande vaut la moitié de l'exercice.

verbe	de	vé
développer	un produit	u sor
factoriser	une somme	u pro
réduire	une somme	l mê rar

développer et factoriser sont inverses

Une expression factorisée est un PRODUIT ; une expression développée est une SOMME.

La formule : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

LA SEULE IDENTITÉ À CONNAÎTRE PAR CŒUR EN TROISIÈME

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Lue de gauche à droite elle développe ;
lue de droite à gauche elle factorise, et
c'est ce sens-là qui sert. Reconnaître
 $x^2 - 49$ comme $x^2 - 7^2$ donne
immédiatement $(x + 7)(x - 7)$, sans
aucun calcul — et rien d'autre ne
permettait de factoriser cette
expression.

x	a	- b
a	a ²	- ab
+ b	+ ab	- b ²

- ab et + ab s'annulent

**Les deux produits croisés s'annulent : c'est pour
cela qu'il ne reste pas de terme du milieu.**

Méthode : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

1. Repérer le verbe avant de commencer

L'énoncé dit « développer », « factoriser » ou « réduire ». Le résultat attendu n'est pas de la même forme : un produit pour une factorisation, une somme pour un développement. Une réponse de la mauvaise forme est fautive, même si le calcul est juste.

2. Développer : compter ses produits

Avec une parenthèse, il y a autant de produits que de termes à l'intérieur. Avec deux parenthèses de deux termes chacune, il y en a exactement QUATRE. Compter avant de calculer évite l'oubli, qui est l'erreur dominante.

3. Factoriser : chercher le commun, y compris la lettre

On regarde d'abord les nombres — quel diviseur ont-ils tous ? — puis les lettres : si x figure dans chaque terme, il sort aussi. Puis on développe mentalement pour vérifier qu'on retombe sur l'expression de départ.

4. Un carré : on écrit le produit en entier

Devant $(x + 3)^2$, on n'a aucune formule à retrouver : on récrit $(x + 3)(x + 3)$, puis on développe les quatre produits. C'est plus long de trois secondes, et cela ne se trompe jamais — alors qu'une formule mal mémorisée fait perdre le terme du milieu.

5. Vérifier sur un nombre

Une égalité littérale doit être vraie POUR TOUT x . Si l'on doute, on choisit une valeur simple — $x = 1$ ou $x = 2$ — et on calcule les deux membres. Deux résultats différents prouvent l'erreur ; deux résultats égaux ne prouvent rien à eux seuls, mais rassurent.

Selon ce que l'on cherche : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

On me demande de développer

Je pars d'un produit et je dois obtenir une somme. Je multiplie chaque terme, sans en oublier, puis je réduis.

On me demande de factoriser

Je pars d'une somme et je dois obtenir un produit. Je cherche un facteur commun ; s'il n'y en a pas, je regarde si c'est une identité remarquable.

On me demande de réduire

Je regroupe les termes semblables : les x^2 ensemble, les x ensemble, les nombres ensemble. Rien d'autre ne se regroupe.

On me donne une valeur pour la lettre

Je remplace, avec des parenthèses si le nombre est négatif, et je calcule dans l'ordre des priorités.

On me demande si une égalité est vraie pour tout x

Je développe les deux membres. S'ils donnent la même expression réduite, l'égalité est vraie partout ; sinon, un contre-exemple suffit à conclure.

Exemples corrigés : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

Développer, puis réduire

L'expression $A = 3(x + 4) + 2x$.

Développer puis réduire A .

étape	expression
départ	$3(x + 4) + 2x$
développée	$3x + 12 + 2x$
réduite	$5x + 12$

développer, puis réduire

On ne regroupe que ce qui est de même nature : le 12 reste seul.

On développe d'abord : le 3 multiplie les DEUX termes, donc $3(x + 4) = 3x + 12$. L'expression devient $3x + 12 + 2x$. On réduit ensuite en regroupant les termes semblables : $3x$ et $2x$ sont de même nature et donnent $5x$; le 12 reste seul, car il n'est semblable à rien. Donc $A = 5x + 12$. Contrôle sur une valeur : pour $x = 1$, l'expression de départ vaut $3 \times 5 + 12 = 17$, et $5 \times 1 + 12 = 17$. C'est cohérent.

La double distributivité

L'expression $B = (2x + 1)(x + 3)$.

Développer et réduire B .

Chaque terme de la première parenthèse rencontre chaque terme de la seconde : cela fait exactement quatre produits. $2x \times x = 2x^2$; $2x \times 3 = 6x$; $1 \times x = x$; $1 \times 3 = 3$. On obtient $2x^2 + 6x + x + 3$, puis on réduit les deux termes en x : $B = 2x^2 + 7x + 3$. Le x^2 et le 3 restent seuls, faute de semblable.

Un carré, et une différence de carrés

Les expressions $C = (x + 5)^2$ et $D = x^2 - 36$.

Développer C , factoriser D .

Pour C , on récrit d'abord le carré comme un produit : $(x + 5)(x + 5)$. Les quatre produits sont x^2 , $5x$, $5x$ et 25 ; les deux termes du milieu sont identiques et se regroupent, donc $C = x^2 + 10x + 25$. Écrire $x^2 + 25$ serait faux, et c'est exactement ce que l'on évite en écrivant le produit en entier. Pour D , aucun facteur n'est commun aux deux termes — mais $36 = 6^2$, donc l'expression est une différence de deux carrés : $D = (x + 6)(x - 6)$. Contrôle par développement : $x^2 - 6x + 6x - 36 = x^2 - 36$. Les deux termes du milieu s'annulent ici, au lieu de se regrouper : c'est toute la différence entre les deux calculs.

L'égalité est-elle vraie pour tout x ?

Un élève affirme que $3(x + 2)$ et $3x + 5$ sont égales quel que soit x .

A-t-il raison ?

On développe le premier membre : $3(x + 2) = 3x + 6$. On compare à $3x + 5$: les termes en x sont identiques, mais 6 n'est pas 5. Les expressions ne sont donc PAS égales. Un contre-exemple suffit d'ailleurs à conclure : pour $x = 0$, la première vaut 6 et la seconde 5. Attention au raisonnement inverse — trouver UNE valeur où les deux coïncident ne prouverait rien, car une égalité littérale doit tenir pour tous les nombres à la fois.

Pièges à éviter : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

Lire $5x$ comme $5 + x$. L'absence de signe est une multiplication, jamais une addition.

Écrire $3x + 2 = 5x$. Un terme en x et un nombre ne sont pas semblables : l'expression est déjà réduite.

Écrire $4(x + 3) = 4x + 3$. Le facteur multiplie CHAQUE terme de la parenthèse, donc $4x + 12$.

Écrire $5x + 10 = 5(x + 10)$. En développant, cela donnerait $5x + 50$: le second terme doit être divisé lui aussi, d'où $5(x + 2)$.

Écrire $(x + 2)^2 = x^2 + 4$. Le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés : en écrivant le produit $(x + 2)(x + 2)$ en entier, on trouve $x^2 + 4x + 4$.

Écrire $2x + 3x^2 = 5x^2$. Les puissances diffèrent, donc les termes ne sont pas semblables et rien ne se regroupe.

Oublier les parenthèses en remplaçant un nombre négatif : $2 \times (-3)$ vaut -6 , et sans parenthèses le signe se perd.

À retenir : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

$3x$ signifie $3 \times x$: le signe de multiplication est sous-entendu.

On ne regroupe que les termes SEMBLABLES — même lettre, même puissance.

Développer va du produit vers la somme ; factoriser fait l'inverse.

$(x + 3)^2$ signifie $(x + 3)(x + 3)$: on écrit le produit, puis on développe.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$: une différence de carrés se factorise toujours.

Une égalité littérale doit être vraie pour TOUT x ; un seul contre-exemple la détruit.

Exercices corrigés : Calcul littéral : développer, réduire, factoriser

1. Réduire : $4a - 2a + 3$.

Correction :

Les termes $4a$ et $-2a$ sont semblables et donnent $2a$. Le 3 n'a pas de semblable. Résultat : $2a + 3$, qui ne se réduit pas davantage.

2. Calculer $2a - 5$ pour $a = -3$.

Correction :

On remplace avec des parenthèses : $2 \times (-3) - 5 = -6 - 5 = -11$.

3. Développer : $-2(x - 5)$.

Correction :

Le facteur -2 multiplie les deux termes : $-2 \times x = -2x$, et $-2 \times (-5) = +10$. Résultat : $-2x + 10$. Le double signe moins donne un plus — c'est là que se perd le second terme.

4. Développer et réduire : $(x + 4)(x + 2)$.

Correction :

Quatre produits : x^2 , $2x$, $4x$ et 8. On réduit les deux termes en x : $x^2 + 6x + 8$.

5. Factoriser : $7x + 21$.

Correction :

Le 7 est commun, car $21 = 7 \times 3$. Donc $7x + 21 = 7(x + 3)$. Contrôle : en développant, $7x + 21$. C'est bien l'expression de départ.

6. Factoriser : $6x^2 + 4x$.

Correction :

Le 2 est commun aux nombres et le x à chaque terme : le facteur commun est $2x$. Donc $6x^2 + 4x = 2x(3x + 2)$. Contrôle : $2x \times 3x = 6x^2$ et $2x \times 2 = 4x$.

7. Développer : $(x - 5)^2$.

Correction :

On récrit le carré comme un produit : $(x - 5)(x - 5)$. Les quatre produits sont x^2 , $-5x$, $-5x$ et $+25$ — le dernier est positif, puisque moins par moins donne plus. En regroupant les deux termes du milieu : $x^2 - 10x + 25$.

8. Factoriser : $x^2 - 81$.

Correction :

On reconnaît une différence de deux carrés, car $81 = 9^2$. Donc $x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$.

9. Un élève écrit $(x + 2)^2 = x^2 + 4$. A-t-il raison ?

Correction :

Non. En récrivant le produit en entier — $(x + 2)(x + 2)$ — on trouve quatre produits, dont deux termes en $2x$ au milieu : le développement correct est $x^2 + 4x + 4$. Un contre-exemple le confirme en une ligne — pour $x = 1$, le membre de gauche vaut 9 et celui de droite 5.

10. Les expressions $5(x + 3)$ et $5x + 15$ sont-elles égales pour tout x ?

Correction :

Oui. En développant la première, $5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$: on obtient exactement la seconde. Ce sont deux écritures de la même expression, l'une factorisée et l'autre développée.