

Calculer avec les fractions — cours de maths 4e

Additionner des fractions ne se fait pas comme les multiplier, et c'est là que tout se joue : pour l'addition, il faut des parts de même taille ; pour la multiplication, non. La 4e ajoute les deux dernières opérations — l'inverse, et la division.

LA CONDITION DE L'ADDITION

Des parts de même taille : même dénominateur

LA NOUVEAUTÉ DE 4E

L'inverse d'une fraction, et la division

LE RÉFLEXE FINAL

Simplifier le résultat

À quoi ça sert : Calculer avec les fractions

À La Réunion, on calcule avec des fractions dès qu'on adapte une recette : un rougail prévu pour six quand on est quatre, c'est chaque quantité multipliée par $\frac{4}{6}$, donc par $\frac{2}{3}$. La division de fractions, elle, sert dès qu'on partage une matière : combien de portions d'un tiers de litre dans une bouteille d'un litre et demi, combien de planches de trois quarts de mètre dans une planche de six mètres. C'est toujours la même question — combien de fois ça rentre.

Un peu d'histoire : Calculer avec les fractions

La règle « diviser, c'est multiplier par l'inverse » a longtemps été enseignée sans être expliquée : au XIXe siècle, les manuels français la présentaient comme un tour de main à retenir. Le mathématicien indien Brahmagupta l'énonçait pourtant déjà au VIIe siècle, avec sa justification — et c'est aussi lui qui a le premier écrit des règles complètes pour calculer avec des nombres négatifs, en les appelant « dettes ».

Définition : Calculer avec les fractions

Calculer avec des fractions, c'est faire les quatre opérations sur des nombres écrits en quotient. Chaque opération a sa règle propre : l'addition exige des dénominateurs égaux, la multiplication n'exige rien, et la division se ramène toujours à une multiplication. Le résultat se simplifie à la fin.

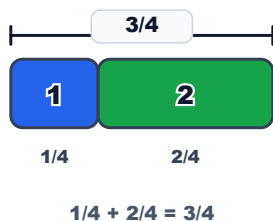


3/4

Propriétés : Calculer avec les fractions

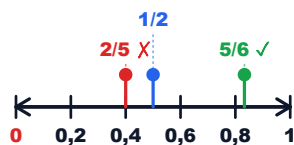
Additionner des parts de même taille

Quand les dénominateurs sont égaux, les parts ont la même taille : on les met bout à bout et on additionne les numérateurs. Le dénominateur, lui, ne bouge pas.



Le piège : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ n'est pas $\frac{2}{5}$

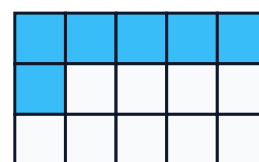
Additionner les dénominateurs donne $\frac{2}{5}$, soit 0,4 — une somme plus PETITE que $\frac{1}{2}$. C'est impossible. La bonne réponse est $\frac{5}{6}$, obtenue en mettant au même dénominateur.



la « somme » serait plus petite qu'un des deux termes

Multiplier, c'est une part d'une part

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Les dénominateurs se multiplient parce que les deux partages se superposent.



6/15

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}, \text{ soit } \frac{2}{5}$$

Une fraction d'une quantité

« $\frac{3}{4}$ de 20 » est une multiplication : $\frac{3}{4} \times 20$. En pratique, on divise par le dénominateur, puis on multiplie par le numérateur.

$$20 \div 4$$

quotient : 5 reste : 0

Vérification :
dividende =
diviseur $\times$
quotient +
reste

Opposé et inverse, à ne pas confondre

L'opposé change le signe et s'annule par l'addition. L'inverse retourne la fraction et s'annule par la multiplication : $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$.

Données	la fraction	opération
	$3/7$	-
	$3/5$	-
	ce qu'on annule	pa

on retourne pour l'inverse, on change le signe pour l'opposé

Diviser, c'est compter combien ça rentre

Diviser $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{4}$, c'est demander combien de quarts tiennent dans un demi. La réponse est 2 — et c'est bien $\frac{1}{2} \times \frac{4}{1}$.



1/2



1/4

deux quarts tiennent dans un demi

puis $5 \times 3 = 15$

La formule : Calculer avec les fractions

POUR DIVISER PAR UNE FRACTION NON NULLE

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

On retourne la **SECONDE** fraction,
jamais la première, et la division
devient une multiplication.

Méthode : Calculer avec les fractions

1. Mettre au même dénominateur

Pour additionner ou soustraire, on
cherche un dénominateur commun
— souvent le produit des deux —
puis on réécrit chaque fraction
avant de calculer. On ne touche aux
numérateurs qu'après.

Données	au départ	a dén
	1/2	
	1/3	
	la somme	

6 est le dénominateur commun

2. Multiplier puis simplifier

On multiplie en ligne —
numérateurs entre eux,
dénominateurs entre eux — sans
chercher de dénominateur
commun. Puis on simplifie le
résultat, toujours à la fin.

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 3 \\ \hline 6 \end{array}$$

et $3 \times 5 = 15$, donc
 $6/15 = 2/5$

3. Retourner pour diviser

On écrit la division, on retourne la
SECONDE fraction, on remplace le
signe $\div$ par un $\times$, puis on applique
la règle de la multiplication.
Retourner la première est l'erreur la
plus fréquente.

Selon ce que l'on cherche : Calculer avec les fractions

**Additionner ou
soustraire**

**Multiplier, ou prendre
une part**

Diviser

On vérifie les dénominateurs. S'ils sont égaux, on additionne les numérateurs ; sinon, on met d'abord au même dénominateur.

On multiplie en ligne. Pour une fraction d'une quantité, on divise par le dénominateur puis on multiplie par le numérateur — c'est plus simple de tête.

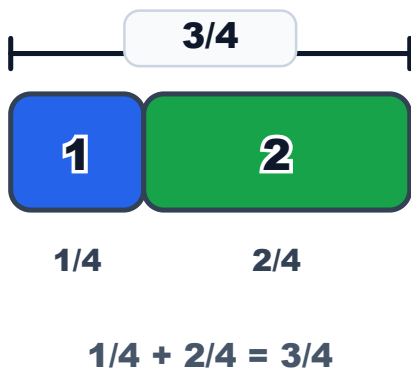
On remplace la division par la multiplication par l'inverse de la seconde fraction, puis on calcule et on simplifie.

Exemples corrigés : Calculer avec les fractions

Deux quarts et un quart

On veut calculer $\frac{1}{4} + \frac{2}{4}$.

Quel est le résultat ?

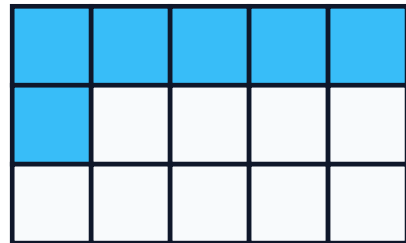


Les deux fractions ont le même dénominateur, 4 : leurs parts ont donc la même taille et on peut les mettre bout à bout. On additionne les numérateurs, $1 + 2 = 3$, et on garde le dénominateur : le résultat est $\frac{3}{4}$. ⚠ Le dénominateur ne s'additionne pas — il dit la taille des parts, qui ne change pas.

Un produit à simplifier

On veut calculer $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$.

Quel est le résultat, sous sa forme la plus simple ?



$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15}, \text{ soit } \frac{2}{5}$$

On multiplie en ligne : les numérateurs entre eux, $2 \times 3 = 6$, et les dénominateurs entre eux, $3 \times 5 = 15$. Le résultat est $\frac{6}{15}$. On simplifie ensuite en divisant en haut et en bas par 3 : $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$. ⚠ On ne cherche PAS de dénominateur commun pour une multiplication — c'est la règle de l'addition, pas celle-ci.

Trois quarts de vingt

Une caisse contient 20 letchis. On en prend les $\frac{3}{4}$.

Combien de letchis prend-on ?

$$20 \div 4$$

quotient :
5

reste : 0

**Vérification : dividende =
diviseur × quotient + reste**

puis $5 \times 3 = 15$

« Les $\frac{3}{4}$ de 20 » signifie $\frac{3}{4} \times 20$. En pratique on divise d'abord par le dénominateur : $20 \div 4 = 5$, ce qui donne la taille d'un quart. Puis on multiplie par le numérateur : $5 \times 3 = 15$. On prend donc 15 letchis. Contrôle : 15 est bien inférieur à 20, et supérieur à la moitié — ce qui est cohérent, puisque $\frac{3}{4}$ est plus grand que $\frac{1}{2}$.

Pièges à éviter : Calculer avec les fractions

Additionner les dénominateurs : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ne fait pas $\frac{2}{5}$. Le dénominateur dit la TAILLE des parts — on ne peut additionner que des parts de même taille.

Confondre opposé et inverse : l'opposé de $\frac{3}{7}$ est $-\frac{3}{7}$, son inverse est $\frac{7}{3}$. L'un s'annule par l'addition, l'autre par la multiplication.

Oublier de simplifier à la fin : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$ donne $\frac{6}{15}$, qui n'est pas la forme la plus courte. La bonne réponse est $\frac{2}{5}$.

À retenir : Calculer avec les fractions

On n'additionne que des fractions de même dénominateur : sinon, on les met d'abord au même dénominateur.

Pour multiplier, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, puis on simplifie.

Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse : on retourne la seconde fraction et on multiplie.

Exercices corrigés : Calculer avec les fractions

1. Un élève affirme que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. A-t-il raison ? Justifie sans faire le calcul exact.

Correction :

Non. On peut le voir sans calculer : $\frac{2}{5}$ vaut 0,4, ce qui est plus PETIT que $\frac{1}{2}$. Or une somme de deux nombres positifs est forcément plus grande que chacun d'eux. Il a additionné les dénominateurs, ce qui est interdit. La bonne méthode est de mettre au même dénominateur : $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ et $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, donc la somme vaut $\frac{5}{6}$.

2. Quel est l'inverse de $\frac{3}{5}$, et quel est son opposé ?

Correction :

L'inverse s'obtient en échangeant numérateur et dénominateur : c'est $\frac{5}{3}$. On le vérifie en multipliant, $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$. L'opposé, lui, s'obtient en changeant le signe : c'est $-\frac{3}{5}$, et on le vérifie en additionnant, $\frac{3}{5} + (-\frac{3}{5}) = 0$.

3. Diviser par $\frac{2}{3}$ revient à multiplier par quoi ?

Correction :

Par $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire par l'inverse de $\frac{2}{3}$. Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse : on retourne la SECONDE fraction et on remplace le signe $\div$ par un $\times$.

4. Calculer $\frac{1}{2}$ de 30.

Correction :

« La moitié de 30 » s'écrit $\frac{1}{2} \times 30$. On divise par le dénominateur : $30 \div 2 = 15$, puis on multiplie par le numérateur : $15 \times 1 = 15$. Le résultat est 15.