

Calculer un volume : du pavé à la boule

cours et exercices corrigés de maths 3e

Un volume compte des cubes. C'est pour cela que son unité s'écrit avec un petit 3 — trois dimensions, trois longueurs multipliées. Presque tous les solides du collège se calculent alors de la même façon, en empilant une base sur une hauteur. La troisième ajoute le seul qui refuse cette règle, parce qu'il n'a ni base ni hauteur : la boule.

LA RÈGLE GÉNÉRALE

$V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

L'EXCEPTION

La boule : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

LE PIÈGE

Agrandir de k multiplie le volume par k^3 , jamais par k

À quoi ça sert : Calculer un volume : du pavé à la boule

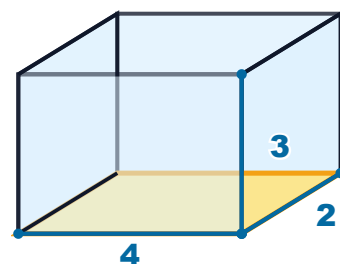
À La Réunion, un récupérateur d'eau de pluie est un cylindre, et connaître son volume en litres décide de l'autonomie d'une maison en saison sèche. Une citerne de 1 m de rayon et 2 m de haut contient $\pi \times 1^2 \times 2 \approx 6,28 \text{ m}^3$, soit plus de 6 000 litres. Mais l'usage le plus contre-intuitif du chapitre est ailleurs : la règle du k^3 explique pourquoi une boule de glace deux fois plus large coûte huit fois plus cher à fabriquer, et pourquoi un modèle réduit au dixième d'un bateau ne pèse pas le dixième, mais le millième.

Un peu d'histoire : Calculer un volume : du pavé à la boule

Archimède, au III^e siècle avant notre ère, démontre qu'une sphère inscrite dans un cylindre occupe exactement les deux tiers de son volume. Il tenait ce résultat pour le plus beau de tous les siens — au point de demander qu'une sphère et son cylindre soient gravés sur sa tombe, avec le rapport $2/3$. Cicéron raconte avoir retrouvé ce tombeau à Syracuse, plus de cent ans après, envahi par les ronces et reconnaissable à cette seule figure. La formule que vous apprenez cette année en découle directement : le volume du cylindre circonscrit vaut $2\pi r^3$, et les deux tiers en font bien $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Définition : Calculer un volume : du pavé à la boule

Le volume d'un solide mesure la place qu'il occupe dans l'espace. On le compte en cubes unités : un pavé de 3 sur 2 sur 4 contient $3 \times 2 \times 4 = 24$ petits cubes, d'où son volume de 24 unités cubes. C'est cette origine qui explique l'écriture des unités — cm^3 , m^3 — et le fait qu'un volume se calcule **TOUJOURS** en multipliant trois longueurs, jamais en les additionnant.



Trois longueurs, trois directions : le volume vaut $4 \times 2 \times 3 = 24$ unités cubes. Chaque dimension compte une fois, ce qui donne au résultat son exposant 3.

Propriétés : Calculer un volume : du pavé à la boule

Pourquoi l'unité porte un exposant 3

Une longueur se mesure en centimètres, une aire en cm^2 parce qu'on multiplie deux longueurs, et un volume en cm^3 parce qu'on en multiplie trois. L'exposant n'est pas décoratif : il COMPTE les dimensions. C'est aussi ce qui permet de repérer une erreur d'un coup d'œil — un résultat de volume annoncé en cm^2 signale toujours une opération manquante.

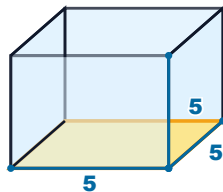
on mesure	on multiplie	un
une longueur	rien	c
une aire	2 longueurs	cm^2
un volume	3 longueurs	cm^3

l'exposant compte les dimensions

L'unité est un contrôle gratuit : elle doit suivre le nombre de longueurs multipliées.

Le pavé droit : on multiplie, on n'additionne pas

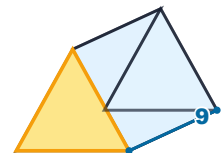
Le volume d'un pavé droit est le produit de ses trois dimensions : $V = L \times l \times h$. Pour un pavé de 7 cm sur 4 cm sur 3 cm, cela donne 84 cm^3 . **➡** Écrire $7 + 4 + 3 = 14$ est l'erreur la plus fréquente du chapitre, et l'unité la trahit aussitôt : une somme de centimètres donne des centimètres, jamais des cm^3 . Le cube en est le cas particulier, avec $V = c^3$.



Un cube d'arête 5 : $5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ cm}^3$.

Le prisme droit : une base, puis une hauteur

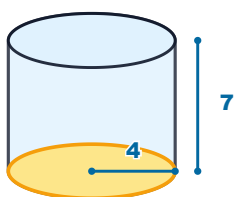
Un prisme droit se calcule en deux temps : on trouve l'aire de sa base, puis on la multiplie par la hauteur. $V = B \times h$. Une base de 24 cm^2 et une hauteur de 9 cm donnent 216 cm^3 . Le pavé droit n'est qu'un prisme dont la base est un rectangle — d'où le fait qu'une seule règle suffise pour les deux.



Aire de base 24, hauteur 9 : $24 \times 9 = 216 \text{ cm}^3$.

Le cylindre : la même règle, avec un disque

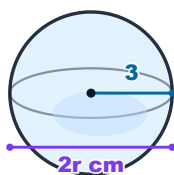
Un cylindre est un prisme dont la base est un disque. On applique donc la même règle, en calculant d'abord l'aire du disque : $\mathcal{B} = \pi r^2$, puis $V = \pi r^2 h$. ⚠ Si l'énoncé donne le DIAMÈTRE, il faut le diviser par deux avant tout calcul — c'est le rayon qui figure dans la formule, et l'oublier quadruple le résultat.



Rayon 4, hauteur 7 : $\pi \times 4^2 \times 7 = 112\pi \text{ cm}^3$, soit environ $351,68 \text{ cm}^3$.

La boule : la seule qui échappe à la règle

Une boule n'a ni base ni hauteur : aucune des formules précédentes ne peut s'y appliquer, et il faut donc en apprendre une nouvelle — $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Le rayon y figure AU CUBE, ce qui explique qu'une petite différence de rayon change beaucoup le volume. ⚠ Écrire $4\pi r^2$ est l'erreur classique : elle oublie à la fois le tiers et le cube.



Rayon 3 : $\frac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi \text{ cm}^3$ — le cube du rayon vaut 27.

Agrandir de k multiplie le volume par k^3

Si l'on multiplie TOUTES les longueurs d'un solide par k , son volume est multiplié par k^3 — et non par k . Doubler les arêtes d'un cube multiplie donc son volume par 8, pas par 2. La raison tient en une ligne : trois longueurs interviennent dans le calcul, et chacune est multipliée par k . C'est la même logique que pour les aires, où le facteur est k^2 parce que deux longueurs interviennent.

on agrandit de	longueurs	a
k	$\times k$	
2	$\times 2$	
1/2	$\div 2$	

une dimension, un exposant

L'exposant est le nombre de dimensions concernées : 1, 2 ou 3.

Les litres sont des décimètres cubes

Un litre est exactement le volume d'un cube d'un décimètre d'arête : $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$. Tout le reste s'en déduit. Comme $1 \text{ dm} = 10 \text{ cm}$, un décimètre cube vaut $10 \times 10 \times 10 = 1\,000 \text{ cm}^3$: un litre fait donc $1\,000 \text{ cm}^3$. Et un mètre cube, qui contient $10 \times 10 \times 10$ décimètres cubes, vaut 1 000 litres.

volume	en litres
1 cm^3	0,001 L
1 dm^3	1 L
1 m^3	1 000 L

chaque saut vaut 1 000

D'une unité de volume à la suivante, le facteur est 1 000 — et non 10.

Un solide composé se découpe

Beaucoup d'objets réels sont la réunion de deux solides simples — un cylindre surmonté d'une demi-boule, par exemple. On calcule alors chaque morceau séparément, puis on additionne. ⚠ Le volume d'une demi-boule est la MOITIÉ de celui de la boule entière, soit $\frac{2}{3}\pi r^3$: on divise le résultat, jamais le rayon.

morceau	sa formule
cylindre	$\pi r^2 h$
demi-boule	$\frac{2}{3}\pi r^3$
le total	on additionne

on découpe, puis on ajoute

Chaque morceau garde sa propre formule ; seul le résultat final se cumule.

La formule : Calculer un volume : du pavé à la boule

LE VOLUME D'UNE BOULE DE RAYON

R

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

C'est la seule formule vraiment neuve de l'année, et la seule qui ne s'écrit pas « aire de base $\times$ hauteur » — une boule n'ayant ni l'une ni l'autre. ⚠ Le rayon est AU CUBE : doubler le rayon multiplie donc le volume par 8. Et si l'énoncé fournit le diamètre, il faut le diviser par deux avant tout calcul.

rayon	r^3	volume
3	27	36π
6	216	288π

rayon doublé, volume $\times 8$

De 3 à 6, le rayon double et le volume est multiplié par huit : c'est le k^3 .

Méthode : Calculer un volume : du pavé à la boule

1. Choisir la formule en regardant la base

Le solide a-t-il une base plate qui se répète sur toute la hauteur ? Alors $V = \mathcal{B} \times h$, qu'elle soit rectangle, triangle ou disque. S'il n'a pas de base — une boule — c'est qu'il faut la formule spécifique. Cette seule question tranche entre presque tous les cas du programme.

2. Vérifier rayon ou diamètre AVANT de calculer

Les formules du cylindre et de la boule contiennent le rayon. Un énoncé qui donne le diamètre exige donc une division par deux en toute première ligne. ⚠ L'oubli est indolore à l'écriture et fatal au résultat : il multiplie le volume d'un cylindre par 4, et celui d'une boule par 8.

3. Contrôler par l'unité

Un volume s'exprime toujours avec un exposant 3. Un résultat en cm^2 signale une multiplication oubliée, et un résultat sans exposant une addition faite à la place d'un produit.

4. Passer aux litres par les décimètres cubes

On convertit d'abord en dm^3 , puis on lit directement le nombre de litres. Le facteur entre deux unités de volume voisines est 1 000 — se tromper de facteur en prenant 10 est l'erreur habituelle des conversions.

5. Devant un agrandissement : compter les dimensions

On se demande combien de longueurs interviennent dans la grandeur cherchée. Une : le facteur est k . Deux, c'est une aire : k^2 . Trois, c'est un volume : k^3 . Aucune formule à retenir, juste un comptage.

Selon ce que l'on cherche : Calculer un volume : du pavé à la boule

Le solide a une base constante

Pavé, prisme, cylindre : je calcule l'aire de la base, puis je multiplie par la hauteur.

C'est une boule

J'applique $\frac{4}{3}\pi r^3$, après avoir vérifié que je dispose bien du rayon.

On me demande une contenance

Je convertis en décimètres cubes : le nombre de litres est alors le même nombre.

Le solide est agrandi ou réduit

Je multiplie le volume initial par k^3
— sans jamais refaire le calcul complet.

Le solide est composé de deux morceaux

Je calcule chaque morceau avec sa propre formule, puis j'additionne les deux volumes.

Exemples corrigés : Calculer un volume : du pavé à la boule

Le récupérateur d'eau

Un récupérateur cylindrique a un rayon de 40 cm et une hauteur de 100 cm.

Quelle est sa contenance en litres ? On prendra $\pi \approx 3,14$.

étape	résultat
aire de base	5 024 cm ²
× hauteur	502 400 cm ³
÷ 1 000	502 L

cm³ vers litres

La conversion se fait à la fin, sur un résultat déjà juste.

On applique $V = \pi r^2 h$: l'aire de la base vaut $3,14 \times 40^2 = 3,14 \times 1\,600 = 5\,024 \text{ cm}^2$, puis on multiplie par la hauteur, ce qui donne $502\,400 \text{ cm}^3$.
Reste à convertir : 1 000 cm³ font un litre, donc on divise par 1 000 et l'on obtient environ 502 litres.
Contrôle de plausibilité : une cuve de 80 cm de large sur 1 m de haut, un demi-mètre cube, c'est bien l'ordre de grandeur d'un récupérateur domestique.

Une boule, et l'erreur à ne pas commettre

Une boule a un rayon de 3 cm.

Donner son volume sous la forme $a\pi$.

On applique $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Le rayon au cube vaut $3^3 = 27$, donc $V = \frac{4}{3} \times 27 \times \pi$. Or $\frac{4}{3} \times 27 = 4 \times 9 = 36$, d'où $V = 36\pi \text{ cm}^3$.  Écrire $4\pi \times 3^2 = 36\pi$ donnerait le même nombre par pure coïncidence, mais le raisonnement serait faux : il oublie le tiers ET met le rayon au carré au lieu du cube. Avec un rayon de 6, cette méthode donnerait 144π au lieu de 288π .

On double toutes les arêtes

Un cube a une arête de 5 cm. On multiplie toutes ses longueurs par 2.

Quel est le volume du nouveau cube ?

	arête	volume
avant	5	125
après	10	1 000
facteur	$\times 2$	$\times 8$

$$2^3 = 8$$

L'arête double, le volume est multiplié par huit.

Le volume initial vaut $5^3 = 125 \text{ cm}^3$.

L'agrandissement a pour rapport $k = 2$, donc le volume est multiplié par $k^3 = 8$: le nouveau volume est $125 \times 8 = 1\,000 \text{ cm}^3$. Vérification directe : la nouvelle arête mesure 10 cm, et $10^3 = 1\,000$. C'est bien le même résultat.  Répondre 250 cm^3 reviendrait à multiplier par 2 — c'est-à-dire à traiter le volume comme une longueur.

L'aquarium

Un aquarium en forme de pavé droit mesure 50 cm sur 30 cm sur 40 cm.

Quelle est sa contenance en litres ?

Le volume vaut $50 \times 30 \times 40 = 60\,000 \text{ cm}^3$.

Comme 1 litre vaut $1\,000 \text{ cm}^3$, la contenance est de 60 litres. On peut aussi convertir les dimensions d'abord : $5 \text{ dm} \times 3 \text{ dm} \times 4 \text{ dm} = 60 \text{ dm}^3$, et un décimètre cube étant un litre, on lit le résultat directement. Cette seconde méthode évite les grands nombres, et c'est souvent la plus sûre.

Pièges à éviter : Calculer un volume : du pavé à la boule

Écrire $7 + 4 + 3 = 14 \text{ cm}^3$ pour un pavé. Un volume est un PRODUIT de trois longueurs : $7 \times 4 \times 3 = 84 \text{ cm}^3$.

Écrire $4\pi r^2$ pour une boule. La formule est $\frac{4}{3}\pi r^3$: il manque le tiers, et le rayon est au cube.

Utiliser le diamètre là où la formule demande le rayon. Pour un cylindre, cela multiplie le volume par 4 ; pour une boule, par 8.

Croire qu'un agrandissement de rapport 2 double le volume. Il le multiplie par $2^3 = 8$.

Convertir les volumes de 10 en 10. Entre deux unités de volume voisines, le facteur est 1 000.

Diviser le rayon par deux pour une demi-boule. C'est le VOLUME qu'on divise par deux, pas le rayon.

Annoncer un volume en cm^2 . L'exposant compte les dimensions : un volume en porte toujours trois.

À retenir : Calculer un volume : du pavé à la boule

Un volume est un produit de trois longueurs — d'où l'exposant 3 de son unité.

Pavé, prisme, cylindre : $V = \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$.

Cylindre : $V = \pi r^2 h$, en passant par l'aire du disque.

Boule : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ — la seule sans base ni hauteur.

$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$, et $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$.

Agrandir de k : longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.

Exercices corrigés : Calculer un volume : du pavé à la boule

1. Un pavé droit mesure 8 cm, 5 cm et 4 cm. Quel est son volume ?

Correction :

$8 \times 5 \times 4 = 160 \text{ cm}^3$. On multiplie les trois dimensions ; les additionner donnerait 17, qui ne serait même pas un volume.

2. Un cube a une arête de 6 cm. Quel est son volume ?

Correction :

$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ cm}^3$.

3. Un prisme droit a une base d'aire 15 cm^2 et une hauteur de 4 cm. Quel est son volume ?

Correction :

$V = \mathcal{B} \times h = 15 \times 4 = 60 \text{ cm}^3$.

4. Un cylindre a un rayon de 4 cm et une hauteur de 7 cm. Donner son volume sous la forme $a\pi$.

Correction :

$V = \pi r^2 h = \pi \times 16 \times 7 = 112\pi \text{ cm}^3$.

5. Un cylindre a un diamètre de 12 cm et une hauteur de 5 cm. Quel est son volume sous la forme $a\pi$?

Correction :

Le diamètre vaut 12, donc le rayon vaut 6. $V = \pi \times 6^2 \times 5 = 180\pi \text{ cm}^3$. Utiliser 12 au lieu de 6 aurait quadruplé le résultat.

6. Une boule a un rayon de 6 cm. Donner son volume sous la forme $a\pi$.

Correction :

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = \frac{4}{3}\pi \times 216 = 288\pi \text{ cm}^3.$$

7. Dans la formule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, si le rayon double, par combien le volume est-il multiplié ?

Correction :

Par 8, car le rayon figure au cube et $2^3 = 8$. C'est le cas particulier de la règle générale des agrandissements.

8. Un solide de 200 cm^3 est agrandi avec un coefficient 3. Quel est son nouveau volume ?

Correction :

$$200 \times 3^3 = 200 \times 27 = 5\,400 \text{ cm}^3.$$

9. Combien de litres y a-t-il dans 1 m^3 ?

Correction :

1 000 litres. Un mètre cube contient $10 \times 10 \times 10$ décimètres cubes, et chaque décimètre cube vaut un litre.

10. Un pavé droit a un volume de 48 cm^3 et une base de 4 cm sur 3 cm. Quelle est sa hauteur ?

Correction :

L'aire de la base vaut $4 \times 3 = 12 \text{ cm}^2$. Comme $V = \mathcal{B} \times h$, on a $h = 48 \div 12 = 4 \text{ cm}$.

