

Dépendance entre deux grandeurs — cours de maths 4e

Le prix d'une course de taxi dépend de la distance. La température d'un ballon d'eau dépend du temps de chauffe. Dans ces situations, connaître une grandeur suffit à déterminer l'autre — et il existe quatre façons de décrire ce lien : une phrase, un programme de calcul, un tableau, un graphique. Savoir passer de l'une à l'autre, c'est tout l'objet de cette fiche.

LE MOT DE 4E

Dépendre : la première grandeur DÉTERMINE la seconde

LES QUATRE MODES

Phrase · programme de calcul · tableau · graphique

LE PIÈGE

Dépendre n'est pas être proportionnel

À quoi ça sert : Dépendance entre deux grandeurs

Les dépendances non proportionnelles sont la règle dès qu'un abonnement entre en jeu, et c'est pour cela qu'elles méritent un chapitre. Une salle d'escalade à La Réunion demande une inscription puis un prix par séance ; un forfait téléphonique a une part fixe et une part variable ; un taxi a sa prise en charge. Dans chaque cas, la question utile n'est pas « quelle offre est la moins chère », mais « à partir de combien de séances l'abonnement devient-il rentable ». C'est exactement ce que permet de lire un tableau ou un graphique — et c'est le raisonnement qu'un adulte refait toute sa vie devant deux contrats.

Un peu d'histoire : Dépendance entre deux grandeurs

L'idée qu'une grandeur en détermine une autre est très ancienne — les tables babyloniennes de carrés et d'inverses, vers 1800 avant notre ère, en sont déjà des tableaux de valeurs. Mais le mot « fonction » est de Leibniz, à la fin du XVIIe siècle, et il désignait d'abord une longueur liée à un point d'une courbe. C'est Euler qui, en 1748, lui donne son sens moderne et introduit la notation qu'on utilise encore. Un siècle plus tard, Dirichlet en donne la définition la plus large : peu importe la formule, il suffit qu'à chaque valeur corresponde une valeur et une seule. C'est cette idée-là — et non la formule — que l'on installe en quatrième.

Définition : Dépendance entre deux grandeurs

Une grandeur dépend d'une autre lorsque connaître la première SUFFIT

à déterminer la seconde, sans ambiguïté. Le prix payé dépend de la masse de letchis achetée : 3 kg donnent toujours le même prix. La couleur des yeux ne dépend pas de l'âge : deux élèves du même âge peuvent avoir des yeux différents. ⚠️ La proportionnalité est un CAS PARTICULIER de dépendance, pas sa définition — le prix d'un taxi dépend de la distance sans lui être proportionnel.

Données	si je connais...	je peux trouver...	dépendance ?
	la masse achetée	le prix payé	oui
	le côté d'un carré	son aire	oui
	l'âge d'un élève	la couleur de ses yeux	non

connaître la première suffit-il ?

Le test tient en une question : deux résultats différents pourraient-ils correspondre à la même valeur de départ ? Si oui, il n'y a pas de dépendance.

Propriétés : Dépendance entre deux grandeurs

Dépendre, c'est être déterminé par

Ce n'est pas « varier en même temps ». La question est : connaître la première grandeur suffit-il à fixer la seconde ? Le prix d'un car dépend du nombre de places réservées. Le nombre de buts marqués ne dépend pas du numéro de maillot — deux joueurs portant le même numéro peuvent en marquer autant qu'ils veulent.

Données	situation	dépendance
	prix selon la masse	oui
	aire selon le côté	oui
	pointure selon le prénom	non

la première fixe-t-elle la seconde ?

Dépendre n'est pas être proportionnel

Un taxi facture 4 € de prise en charge puis 2 € par kilomètre. Le prix dépend bien de la distance — une distance donnée fixe le prix — mais 2 km coûtent 8 € et 4 km en coûtent 12, ce qui n'est pas le double. ★ C'est la prise en charge qui casse la proportionnalité : un trajet de 0 km coûte déjà 4 €.

Données	distance	prix
	0 km	4
	2 km	8
	4 km	12

dépendant, mais pas proportionnel

Un programme de calcul décrit une dépendance

« Choisis un nombre, multiplie-le par 3, ajoute 2 » : à chaque nombre de départ correspond un seul résultat. C'est la façon la plus concrète de décrire un lien. ⚠️ L'ORDRE fait partie de la règle : multiplier puis ajouter ne donne pas la même chose qu'ajouter puis multiplier.

Données	on part de	$\times 3$	$+ 2$
	1	3	5
	2	6	8
	5	15	17

un seul résultat par nombre de départ

Un tableau se lit dans les deux sens

De haut en bas, on trouve la valeur qui correspond : sous 3, on lit 11.

De bas en haut, on cherche de quel nombre on est parti : 11 se trouve au-dessus de 3. ★ Le second sens est le plus difficile, parce qu'il faut CHERCHER au lieu de simplement lire.

x	1	2	3	4	5
f(x)	5	8	?	14	17

que vaut la valeur pour 3 ?

Un graphique aussi

Pour trouver la valeur qui correspond à 3 : on part de 3 sur l'axe du bas, on MONTE jusqu'au point, on lit à gauche. Pour le sens inverse : on part de la hauteur, on va HORIZONTALEMENT jusqu'au point, on descend. ⚠ Confondre les deux trajets est l'erreur la plus fréquente.

Données	je cherche	p
	la valeur	l'axe du bas
	le départ	l'axe de gauche

deux trajets inverses

Aligné ne veut pas dire proportionnel

Sur un graphique, des points parfaitement alignés peuvent décrire une situation qui n'est PAS proportionnelle. Le test est ailleurs : la droite passe-t-elle par l'origine ? Si le prix vaut déjà 4 € pour 0 article, ce n'est pas proportionnel — même si tout est bien aligné.

Données	pour 0	aligné ?
	0	oui
	4 €	oui

c'est le point à zéro qui décide

La formule : Dépendance entre deux grandeurs

POUR DÉCRIRE UN LIEN ENTRE DEUX GRANDEURS

une phrase • un programme de calcul • un tableau • un graphique

Quatre façons de dire la même chose. Savoir passer de l'une à l'autre est ce que demande le programme — et c'est aussi ce qui rend le lien utilisable : le tableau pour lire vite, le graphique pour comparer d'un coup d'œil, le

Données	mode	ce qu'il donne vite
	le programme	n'importe quelle valeur
	le tableau	les valeurs déjà calculées
	le graphique	l'allure et les comparaisons

chaque mode a son usage

programme pour calculer n'importe
quelle valeur.

Méthode : Dépendance entre deux grandeurs

1. Reconnaître une dépendance

Une seule question : deux résultats différents pourraient-ils correspondre à la même valeur de départ ? Si oui, il n'y a pas de dépendance. Puis, séparément : est-ce proportionnel ? On le vérifie en regardant ce que vaut la seconde grandeur quand la première vaut zéro.

2. Suivre un programme, et le remonter

Dans le sens direct, on applique les étapes DANS L'ORDRE. Dans le sens inverse — on connaît le résultat, on cherche le départ — on défait chaque étape par son opération contraire, en commençant par la DERNIÈRE.

Données	sens	on fait
	direct	$\times 3$ puis $+ 2$
	inverse	$- 2$ puis $\div 3$

à l'envers, et en sens contraire

3. Lire dans le bon sens

On repère d'abord ce que l'énoncé DONNE. S'il donne la valeur de départ, on lit dans le sens direct. S'il donne le résultat, on cherche à l'envers. C'est la même distinction dans un tableau et sur un graphique.

x	1	2	3	?
f(x)	5	8	11	14

de quel nombre vient 14 ?

4. Passer d'un mode à l'autre

Du programme au tableau : on applique le programme à chaque valeur. Du tableau au programme : on regarde de combien la valeur augmente à chaque pas — c'est le facteur — puis ce qu'il faut ajouter.

★ Le contrôle est immédiat : la règle trouvée doit redonner TOUTES les colonnes, pas seulement une.

Données	étape	ce ch
	1	l'augr pi
	2	ce c aj
	3	on v tol co

du tableau vers la règle

Selon ce que l'on cherche : Dépendance entre deux grandeurs

On connaît la valeur de départ

On applique le programme, ou on lit le tableau de haut en bas. C'est le sens direct, le plus simple.

On connaît le résultat

On remonte : on défait le programme à l'envers, ou on cherche dans la ligne du bas du tableau. Ce sens demande de chercher.

On doit comparer deux offres

On calcule les deux pour le nombre voulu. ⚠ Il n'y a pas de meilleure offre en soi — la réponse change selon le nombre.

On se demande si c'est proportionnel

On regarde la valeur pour zéro. Si elle n'est pas nulle, ce n'est pas proportionnel — même si tout paraît régulier.

Exemples corrigés : Dépendance entre deux grandeurs

Le taxi

Un taxi facture 4 € de prise en charge, puis 2 € par kilomètre.

Le prix dépend-il de la distance ? Lui est-il proportionnel ?

Remonter le programme

Un club demande 12 € d'adhésion, puis 3 € par sortie. Malik a payé 39 € en tout.

Combien de sorties a-t-il faites ?

Données	distance	prix
	0 km	4 €
	2 km	8 €
	4 km	12 €

Le prix DÉPEND de la distance : une distance donnée fixe le prix, sans ambiguïté. Le programme est « multiplier par 2, puis ajouter 4 ». Mais il n'est PAS proportionnel. Deux kilomètres coûtent $2 \times 2 + 4 = 8$ € ; quatre kilomètres coûtent $4 \times 2 + 4 = 12$ €. Or 12 n'est pas le double de 8. ★ La raison se lit à zéro : un trajet de 0 km coûte déjà 4 €. Dans une situation proportionnelle, zéro donne toujours zéro.

Données	étape	calcul
	on retire l'adhésion	$39 - 12 = 27$
	on divise	$27 \div 3 = 9$

On connaît le résultat et on cherche le départ : il faut donc remonter le programme, en défaisant les étapes dans l'ordre INVERSE. On retire d'abord l'adhésion : $39 - 12 = 27$ €. Puis on divise par le prix d'une sortie : $27 \div 3 = 9$ sorties. ⚠ Diviser 39 par 3 directement donnerait 13, un résultat faux : l'adhésion ne se divise pas, elle se paie une seule fois.

Les deux offres

Offre A : 6 € la séance, sans abonnement. Offre B : 20 € d'abonnement, puis 2 € la séance.

Laquelle choisir pour 10 séances ?

Données	séances	A	B
	1	6 €	22 €
	5	30 €	30 €
	10	60 €	40 €

Pour 10 séances : A donne $10 \times 6 = 60$ €, et B donne $20 + 10 \times 2 = 40$ €. L'offre B est donc la moins chère. ★ Mais la réponse dépend du nombre ! Pour 1 séance, A coûte 6 € et B en coûte 22. Le tableau montre le point de bascule : à 5 séances, les deux coûtent exactement 30 €. C'est tout l'intérêt du chapitre — il n'y a pas de meilleure offre en soi, il y a une meilleure offre POUR UN NOMBRE DONNÉ.

Pièges à éviter : Dépendance entre deux grandeurs

Confondre dépendre et être proportionnel. Le prix d'un taxi dépend de la distance sans lui être proportionnel.

Croire que des points alignés suffisent à prouver la proportionnalité. Il faut en plus que la droite passe par l'origine.

Inverser l'ordre d'un programme de calcul. « $\times 3$ puis $+ 2$ » et « $+ 2$ puis $\times 3$ » ne décrivent pas le même lien.

Remonter un programme sans défaire les étapes à l'envers. On commence par la DERNIÈRE opération.

Diviser le total quand il contient une part fixe. Une adhésion se retire d'abord, elle ne se divise pas.

Confondre les deux trajets de lecture graphique. Pour trouver la valeur, on monte puis on va à gauche ; pour le départ, on va à droite puis on descend.

À retenir : Dépendance entre deux grandeurs

Une grandeur dépend d'une autre quand connaître la première SUFFIT à déterminer la seconde.

La proportionnalité est un cas particulier de dépendance, pas sa définition.

Le test de la proportionnalité : que vaut la seconde grandeur quand la première vaut zéro ?

Quatre modes décrivent un même lien : une phrase, un programme de calcul, un tableau, un graphique.

Un tableau et un graphique se lisent dans les DEUX sens : trouver la valeur, ou retrouver le départ.

Pour remonter un programme, on défait les étapes dans l'ordre inverse, en commençant par la dernière.

Comparer deux offres n'a de sens que POUR UN NOMBRE DONNÉ — il existe souvent un point de bascule.

Exercices corrigés : Dépendance entre deux grandeurs

1. L'aire d'un carré dépend-elle de la longueur de son côté ? Et la couleur d'une voiture dépend-elle de sa vitesse maximale ?

Correction :

Oui pour la première : un côté donné fixe l'aire, sans ambiguïté. Non pour la seconde : deux voitures de même couleur peuvent avoir des vitesses très différentes.

2. Programme : choisis un nombre, multiplie par 4, ajoute 7. Que donne-t-il pour 6 ?

Correction :

$6 \times 4 = 24$, puis $24 + 7 = 31$.

3. Même programme ($\times 4$ puis $+ 7$). Le résultat vaut 43. De quel nombre est-on parti ?

Correction :

On défait à l'envers : $43 - 7 = 36$, puis $36 \div 4 = 9$. On est parti de 9.

4. Un tableau donne 5 ; 8 ; 11 ; 14 pour les valeurs 1 ; 2 ; 3 ; 4. Quelle valeur correspond à 3 ? Et de quel nombre vient 14 ?

Correction :

Sous 3, on lit 11. Et 14 se trouve au-dessous de 4 : on part donc de 4. Le tableau se lit dans les deux sens.

5. Un tableau donne 9 ; 14 ; 19 ; 24 pour 1 ; 2 ; 3 ; 4. Quel programme de calcul décrit ce lien ?

Correction :

D'une colonne à la suivante, la valeur augmente de 5 : c'est le facteur. Pour 1 on obtient 9, or $1 \times 5 = 5$, et il faut 4 de plus. Le programme est « multiplier par 5, puis ajouter 4 ». ⚠ Ce n'est pas proportionnel : pour 0, la valeur serait 4.

6. Sur un graphique, comment trouve-t-on la valeur qui correspond à 4 ?

Correction :

On part de 4 sur l'axe horizontal, on MONTE jusqu'au point, puis on lit à gauche sur l'axe vertical. Pour le sens inverse, le trajet est exactement l'opposé.

7. Une salle demande 15 € d'inscription puis 4 € par séance. Combien coûtent 12 séances ?

Correction :

$12 \times 4 = 48$, puis $48 + 15 = 63$ €. ⚠ Ce n'est pas proportionnel : 0 séance coûte déjà 15 €.

8. Offre A : 5 € la séance. Offre B : 24 € d'abonnement puis 2 € la séance. À partir de combien de séances B devient-elle plus intéressante ?

Correction :

On cherche quand les deux coûtent pareil : A donne 5 fois le nombre de séances, B donne 24 plus 2 fois ce nombre. Pour 8 séances, A donne 40 € et B donne 40 € : c'est le point de bascule. À partir de 9

séances, B est moins chère.