

La dérivation

Dériver, c'est mesurer la vitesse à laquelle une fonction varie à un instant précis. Le nombre dérivé $f'(a)$ est la pente de la tangente à la courbe : il annonce si la fonction monte, descend, et à quel point.

PRÉREQUIS

Fonctions, équation d'une droite ($y = mx + p$)

L'IDÉE CLÉ

$f'(a)$ = pente de la tangente en a

OUTIL

Tableau des dérivées, calculatrice

À quoi ça sert ?

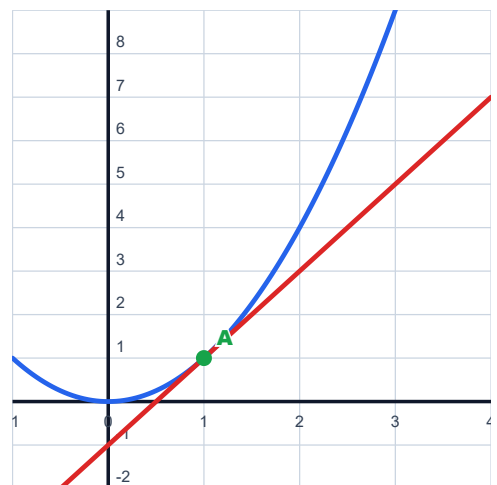
Le nombre dérivé, c'est la « vitesse à l'instant précis » et non la moyenne : la vitesse lue au compteur en montant la Route du Littoral, le débit de la Rivière des Galets qui grimpe pendant un cyclone, ou le coût marginal d'une production (ce que coûte le tout dernier objet fabriqué). Partout où une grandeur varie, sa dérivée dit à quelle vitesse.

Un peu d'histoire

Le calcul différentiel naît à la fin du XVIIe siècle. Isaac Newton (en Angleterre) et Gottfried Leibniz (en Allemagne) l'inventent chacun de leur côté — d'où une célèbre querelle sur la paternité. Pierre de Fermat avait déjà cherché les tangentes un peu avant. La notation f' arrive plus tard, avec Lagrange.

Définition : la dérivation

Le nombre dérivé de f en a , noté $f'(a)$, est la pente de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a . C'est la limite du taux de variation $(f(a + h) - f(a)) / h$ quand h devient très petit ($h \rightarrow 0$). La fonction dérivée f' associe à chaque x ce nombre dérivé $f'(x)$.



La tangente (rouge) à la courbe $y = x^2$ au point $A(1 ; 1)$: sa pente est $f'(1) = 2$.

Propriétés : la dérivation

Le nombre dérivé

$f'(a)$ est la limite du taux de variation $(f(a+h) - f(a)) / h$ quand $h \rightarrow 0$:
c'est la pente de la tangente au point d'abscisse a .

Dériver une somme

$(u + v)' = u' + v'$: on dérive terme à terme. Un facteur constant se garde : $(k \cdot u)' = k \cdot u'$, et une constante seule donne 0.

Produit et quotient

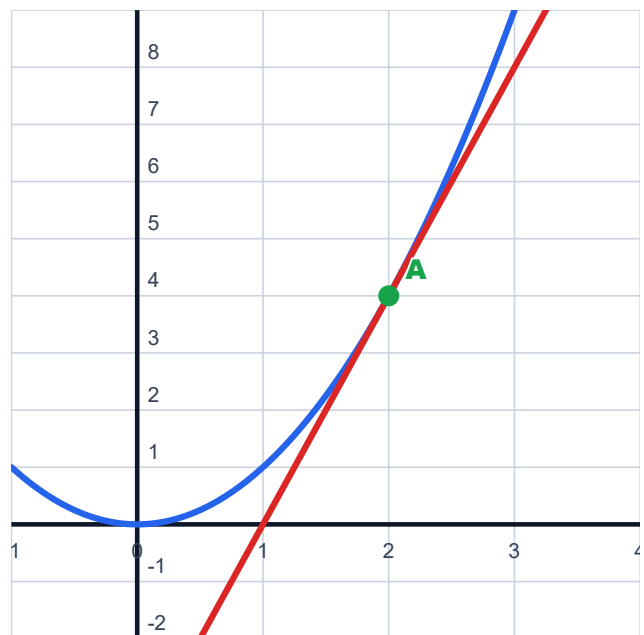
$(u \times v)' = u'v + uv'$; $(u / v)' = (u'v - uv') / v^2$. Attention : ce n'est jamais le produit ni le quotient des dérivées.

La formule

LES DÉRIVÉES USUELLES (À CONNAÎTRE PAR CŒUR)

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$k' = 0 \quad (ax + b)' = a \quad (x^2)' = 2x \quad (x^3)' = 3x^2 \quad (1/x)' = -1/x^2 \quad (\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$$



Méthode : la dérivation

1. Dériver terme à terme

On dérive chaque terme avec les formules usuelles. Les constantes disparaissent (leur dérivée est 0).

2. Calculer un nombre dérivé

On dérive d'abord f pour obtenir $f'(x)$, PUIS on remplace x par a pour calculer $f'(a)$.

3. Écrire une tangente

Tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. La pente est $f'(a)$; elle passe par $(a ; f(a))$.

Selon ce que l'on cherche

Une vitesse, un débit instantané

Le nombre dérivé d'une grandeur en fonction du temps donne sa vitesse (ou son débit) à un instant précis.

La tangente à une courbe

La pente de la tangente en a est $f'(a)$, et son équation est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Un maximum ou un minimum

Un extremum se trouve là où $f'(x)$ s'annule en changeant de signe : la tangente y est horizontale (pente 0).

Exemples corrigés

Le taux de variation

$f(x) = x^2$, entre $a = 1$ et $b = 3$.

Calculer le taux de variation.

$$\text{Taux} = (f(3) - f(1)) / (3 - 1) = (9 - 1) / 2 = 8 / 2 = 4.$$

C'est la pente de la corde entre les deux points.

Dériver un polynôme

$f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

Calculer $f'(x)$.

On dérive terme à terme : $(3x^2)' = 6x$, $(-5x)' = -5$, $(2)' = 0$. Donc $f'(x) = 6x - 5$.

Un nombre dérivé

$f(x) = x^2 - 4x + 1$.

Calculer $f'(3)$.

D'abord $f'(x) = 2x - 4$. Puis on remplace x par 3 : $f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$.

L'équation de la tangente

$f(x) = x^2$, au point d'abscisse $a = 1$.

Donner l'équation de la tangente.



$f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$. Tangente : $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$.

Pièges à éviter

Confondre $f(a)$ et $f'(a)$: $f(a)$ est l'ordonnée du point (la hauteur), $f'(a)$ est la pente de la tangente en ce point.

Croire que $(u \times v)' = u' \times v'$: FAUX. La dérivée d'un produit est $(uv)' = u'v + uv'$, pas le produit des dérivées.

Oublier de remplacer x par a APRÈS avoir dérivé : on calcule d'abord $f'(x)$, puis $f'(a)$.

À retenir

$f'(a)$ = la pente de la tangente en a = la limite du taux de variation quand $h \rightarrow 0$.

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$; les dérivées usuelles se connaissent par cœur.

Tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exercices corrigés : la dérivation

1. Pour $f(x) = x^2$, calcule le taux de variation entre 1 et 3.

Correction :

$$\text{Taux} = (f(3) - f(1)) / (3 - 1) = (9 - 1) / 2 = 4.$$

2. Dérive $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

Correction :

On dérive terme à terme : $f'(x) = 6x - 5$ (la constante 2 disparaît).

3. Pour $f(x) = x^2 - 4x + 1$, calcule $f'(3)$.

Correction :

$$f'(x) = 2x - 4, \text{ donc } f'(3) = 2 \times 3 - 4 = 2.$$

4. Donne l'équation de la tangente à $f(x) = x^2$ au point d'abscisse $a = 1$.

Correction :

$$f(1) = 1, f'(1) = 2. \text{ Tangente : } y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1.$$

