

Développement et factorisation

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Deux écritures pour la même expression, et deux sens pour passer de l'une à l'autre. Ce n'est pas un exercice de style : on choisit la forme selon ce qu'on veut FAIRE. Et la raison numéro un de factoriser, c'est de résoudre — parce qu'un produit nul se résout, alors qu'une somme ne se résout pas.

MOTS CLÉS

Produit, somme, facteur commun, parenthèses

LE SECRET

Un produit qui vaut zéro, c'est l'un de ses morceaux qui vaut zéro

OUTIL

Deux écritures, et on prend celle qui rend la question facile

À quoi ça sert : Développement et factorisation

Un jardin rectangulaire mesure x mètres sur $x + 4$. Son aire vaut $x(x + 4)$, forme FACTORISÉE, ou $x^2 + 4x$, forme développée. Si l'on demande « pour quelle largeur l'aire est-elle nulle ? », la forme factorisée répond en une ligne. Si l'on demande « quelle est l'aire pour $x = 6$? », la forme développée va aussi vite. ★ Aucune des deux n'est meilleure dans l'absolu : c'est la QUESTION qui choisit.

Un peu d'histoire : Développement et factorisation

Distribuer une multiplication sur une addition est un geste que les Babyloniens pratiquaient déjà, en découpant des rectangles. Mais il a fallu attendre le calcul littéral de Viète, à la fin du XVI^e siècle, pour qu'on puisse l'écrire une fois pour toutes sous la forme $k(a + b) = ka + kb$ — et donc l'appliquer sans redessiner. Le mot « factoriser » vient de facteur, au sens de « celui qui fait » : les facteurs sont les morceaux qui FONT le produit.

Définition : Développement et factorisation

DÉVELOPPER, c'est transformer un **PRODUIT** en **SOMME** : $3(x + 2) = 3x + 6$.

FACTORISER, c'est le chemin inverse — transformer une somme en produit : $3x + 6 = 3(x + 2)$. Les deux écritures désignent exactement le même nombre pour chaque valeur de x ; seule leur **FORME** change, et c'est la forme qui décide de ce qu'on peut en faire.

$$(x - 2)(x + 5)$$

FACTORISÉE
— un produit

→
DÉVELOPPER
←
FACTORISER

$$x^2 + 3x - 10$$

DÉVELOPPÉE
— une
somme

La même expression, écrite de deux façons. À gauche on voit les **SOLUTIONS** ; à droite on voit le coefficient de x^2 et le nombre constant.

★ On ne factorise pas par principe, et on ne développe pas par principe : on choisit le sens selon la question. Résoudre demande la gauche ; calculer une image ou reconnaître un degré demande la droite.

Propriétés : Développement et factorisation

★ Pourquoi on factorise : le produit nul

Un produit est nul **SI ET SEULEMENT SI** l'un au moins de ses facteurs est nul. C'est la seule règle du programme qui transforme une équation en deux équations faciles — et elle ne s'applique **QU'À UN PRODUIT**. Voilà à quoi sert la factorisation.

$$(x - 2)(x + 5) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 5 = 0$$
$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -5$$

⊖ Sur la forme développée $x^2 + 3x - 10 = 0$, aucune règle de seconde ne s'applique. C'est pour ça qu'on factorise.

Développer : chacun avec chacun

$k(a + b) = ka + kb$: le facteur devant multiplie **CHACQUE** terme. Pour un produit de deux parenthèses, quatre produits à faire — et les deux termes du milieu se regroupent.

$$(2x + 3)(x + 4)$$
$$2x^2 + 8x + 3x + 12$$
$$2x^2 + 11x + 12$$

Les deux produits croisés, en vert, se regroupent : c'est là qu'on oublie un terme.

⊖ Le moins devant la parenthèse

Un signe moins devant une parenthèse change le signe de TOUS les termes qu'elle contient : $-(A + B) = -A - B$. C'est l'erreur de signe la plus tenace du lycée, et elle ne se corrige qu'en la voyant écrite.

$$5 - (x + 3)$$

$$5 - x - 3$$

$$= 2 - x$$

⊖ Et non $2 + x$: le $+3$ devient -3 lui aussi.

Factoriser : chercher le facteur commun

On repère ce qui apparaît dans TOUS les termes — un nombre, une lettre, ou une parenthèse entière — et on le met devant. $6x^2 + 9x = 3x(2x + 3)$: ici $3x$ est commun aux deux.

$$6x^2 + 9x$$

$$3x \times 2x + 3x \times 3$$

$$3x(2x + 3)$$

On écrit chaque terme comme un produit AVANT de mettre le facteur en évidence.

Factoriser avec une identité

Quand on reconnaît $a^2 - b^2$, on écrit $(a - b)(a + b)$: c'est la différence de deux carrés. ★ Elle sert précisément à résoudre $x^2 = k$, qui n'a pas de méthode directe en seconde.

$$x^2 - 49 = 0$$

$$(x - 7)(x + 7) = 0$$

$$x = 7 \text{ ou } x = -7$$

⊖ Deux solutions, pas une : un carré ne distingue pas les deux signes.

Méthode : Développement et factorisation

1. Je regarde ce qu'on me demande

Résoudre une équation égale à zéro ? Il me faut un PRODUIT, donc je factorise. Calculer une image, comparer des degrés ? Il me faut une SOMME, donc je développe.

résoudre $f(x) = 0$ FACTORISER	calculer $f(3)$ DÉVELOPPER
--	--------------------------------------

La question dit le sens. On ne choisit jamais au hasard.

2. Pour factoriser, je cherche le commun

J'écris chaque terme comme un produit, puis je repère ce qui revient partout. ⚠ Le facteur commun peut être une PARENTHÈSE entière : dans $(x+1)(x+3) + (x+1)$, c'est $(x+1)$.

$$(x+1)(x+3) + (x+1) = (x+1)[(x+3) + 1] = (x+1)(x+4)$$

Le second terme vaut $(x+1) \times 1$: c'est ce « 1 » qu'on oublie.

3. Je vérifie en repartant dans l'autre sens

Une factorisation se contrôle en développant le résultat : on doit retomber sur l'expression de départ. ★ Le contrôle coûte dix secondes et attrape presque toutes les erreurs de signe.

$$3x(2x+3) = 6x^2 + 9x \checkmark$$

On repart du produit et on retrouve la somme initiale.

Selon ce que l'on cherche : Développement et factorisation

★ Résoudre une équation

C'est l'usage numéro un, et la raison d'être du chapitre.

On amène tout d'un côté pour avoir $= 0$, on factorise, puis on annule chaque facteur.

$$3x^2 + 12x = 0$$

$$3x(x + 4) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -4$$

⊖ Diviser par x ferait PERDRE la solution 0 : on factorise, on ne divise pas.

Choisir la forme qui va vite

La forme factorisée montre les solutions ; la forme développée montre le degré et l'ordonnée à l'origine. Les deux disent la même chose, pas de la même façon.

$$(x - 3)(x + 3)$$

les solutions : 3 et
-3

$$x^2 - 9$$

$$f(0) = -9$$

Simplifier une fraction

Plus rare, mais c'est un vrai usage : on ne simplifie une fraction que sur des FACTEURS. Il faut donc factoriser le numérateur avant de pouvoir barrer quoi que ce soit.

$$\frac{4x + 12}{4} = \frac{4(x + 3)}{4}$$

$$= x + 3$$

⊖ Sans factoriser, on serait tenté de barrer le 4 du seul premier terme — et ce serait faux.

Exemples corrigés : Développement et factorisation

Développer un produit double

$$(3x + 2)(x + 5).$$

Développer et réduire.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 15x + 2x + 10 \\ 3x^2 + 17x + 10 \end{aligned}$$

Quatre produits : $3x \times x = 3x^2$, $3x \times 5 = 15x$, $2 \times x = 2x$, $2 \times 5 = 10$. Les deux termes en x se regroupent : $15x + 2x = 17x$. Résultat : $3x^2 + 17x + 10$. ⚠ Oublier l'un des deux produits croisés donnerait $3x^2 + 10$, qui est faux pour toute valeur non nulle.

★ Factoriser pour résoudre

$$5x^2 - 20x = 0.$$

Résoudre cette équation.

$$\begin{aligned} 5x(x - 4) &= 0 \\ x &= 0 \quad \text{ou} \quad x = 4 \end{aligned}$$

Le facteur commun est $5x$: $5x^2 - 20x = 5x(x - 4)$. Le produit est nul si $5x = 0$, donc $x = 0$, ou si $x - 4 = 0$, donc $x = 4$. ⚠ La tentation est de diviser les deux membres par x pour obtenir $5x - 20 = 0$: on trouve alors 4 et on PERD la solution 0. On ne divise jamais par une quantité qui peut être nulle.

Une différence de deux carrés

$$x^2 - 36 = 0.$$

Résoudre.

$$\begin{aligned} (x - 6)(x + 6) &= 0 \\ x &= 6 \quad \text{ou} \quad x = -6 \end{aligned}$$

On reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 6$, donc $x^2 - 36 = (x - 6)(x + 6)$. Le produit s'annule pour $x = 6$ ou $x = -6$. ★ Sans la factorisation, la seconde ne saurait pas résoudre cette équation : c'est l'identité qui ouvre la porte.

⚠ Le moins devant la parenthèse

$$7 - (2x + 5).$$

Développer et réduire.

$$\begin{aligned} 7 - 2x - 5 \\ = -2x + 2 \end{aligned}$$

Le signe moins porte sur toute la parenthèse : $7 - 2x - 5$, soit $-2x + 2$. ⚠ L'erreur presque universelle est d'écrire $7 - 2x + 5 = -2x + 12$: le $+5$ doit devenir -5 . Le contrôle est immédiat — avec $x = 0$, l'expression de départ vaut $7 - 5 = 2$, et non 12.

Pièges à éviter : Développement et factorisation

- Un signe moins devant une parenthèse change le signe de TOUS les termes : $5 - (x + 3) = 2 - x$, jamais $2 + x$.
- Dans un produit double, il y a QUATRE produits. Oublier les deux termes croisés est l'erreur la plus fréquente.
- Pour résoudre $ax^2 + bx = 0$, on factorise — on ne divise pas par x . Diviser fait perdre la solution $x = 0$.
- Un produit nul donne « ou », pas « et » : une seule des deux conditions suffit à annuler le produit.
- $x^2 - 36 = 0$ a DEUX solutions, 6 et -6 . N'en donner qu'une est l'oubli classique.
- On ne simplifie une fraction que sur des FACTEURS. Dans $\frac{4x + 12}{4}$, on ne peut rien barrer avant d'avoir factorisé.

À retenir : Développement et factorisation

Développer : produit $\rightarrow$ somme. Factoriser : somme $\rightarrow$ produit.

★ On factorise POUR RÉSOUDRE : un produit nul se résout, une somme non.

Un produit est nul si l'un AU MOINS de ses facteurs est nul.

$-(A + B) = -A - B$: le moins change tous les signes.

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, et c'est ce qui permet de résoudre $x^2 = k$.

Une factorisation se vérifie en développant : on doit retrouver le départ.

Exercices corrigés : Développement et factorisation

1. Développer $4(x + 7)$.

Correction :

$4x + 28$. Le 4 multiplie les DEUX termes.

2. Développer et réduire $9 - (3x + 4)$.

Correction :

$9 - 3x - 4 = -3x + 5$. — Le $+4$ devient -4 : le moins porte sur toute la parenthèse.

3. Développer et réduire $(x + 3)(x + 6)$.

Correction :

$$x^2 + 6x + 3x + 18 = x^2 + 9x + 18. \text{ Les deux produits croisés se regroupent.}$$

4. Développer et réduire $(2x + 1)(3x + 4)$.

Correction :

$$6x^2 + 8x + 3x + 4 = 6x^2 + 11x + 4.$$

5. Factoriser $8x + 12$.

Correction :

$$4(2x + 3). \text{ Le facteur commun est 4, le plus grand qui divise les deux.}$$

6. Factoriser $7x^2 - 21x$.

Correction :

$$7x(x - 3). \text{ Le facteur commun contient la lettre aussi : } 7x, \text{ et non seulement } 7.$$

7. Factoriser $x^2 - 25$.

Correction :

$$(x - 5)(x + 5) : \text{ une différence de deux carrés, avec } 25 = 5^2.$$

8. Résoudre $x^2 - 81 = 0$.

Correction :

$$(x - 9)(x + 9) = 0, \text{ donc } x = 9 \text{ ou } x = -9. \text{ Deux solutions.}$$

9. Résoudre $(x - 6)(x + 2) = 0$.

Correction :

Le produit est nul si $x - 6 = 0$ ou $x + 2 = 0$, donc $x = 6$ ou $x = -2$.

10. Résoudre $4x^2 + 8x = 0$.

Correction :

On factorise : $4x(x + 2) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = -2$.  Diviser par x aurait fait perdre la solution 0.