

La distributivité — cours de maths 4e

Développer, c'est ouvrir une parenthèse sans changer la valeur du calcul : un produit devient une somme. Tout tient dans un mot — CHAQUE. Le facteur posé devant la parenthèse multiplie chaque terme qui s'y trouve, la lettre comme le nombre. C'est l'outil qui ouvre les identités remarquables, la factorisation et les équations.

LE MOT CLÉ

Développer : d'un produit vers une somme

LE GESTE

Le facteur multiplie CHAQUE terme

LA RÈGLE D'OR

Deux parenthèses, quatre produits

À quoi ça sert : la distributivité

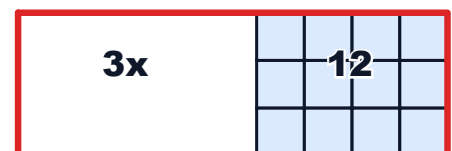
La distributivité, c'est d'abord la façon dont on calcule de tête. Douze barquettes de letchis à 2,50 € au marché de Saint-Paul : on fait 12×2 puis $12 \times 0,50$, soit $24 + 6 = 30$ €. Personne ne pose l'opération. C'est aussi le devis d'un artisan — tant d'heures à tel tarif, plus les fournitures, le tout répété pour chaque pièce d'une maison —, le prix d'un lot en promotion, ou le calcul d'une surface qu'on agrandit : un terrain de 3 mètres de large sur lequel on ajoute 4 mètres de long gagne exactement trois fois quatre mètres carrés.

Un peu d'histoire : la distributivité

Le dessin de cette fiche a plus de deux mille ans : dans les Éléments d'Euclide, au IIIe siècle avant notre ère, la distributivité est une propriété des AIRES, démontrée en découpant un rectangle — il n'y avait alors ni lettres ni signe égal, et un calcul était une figure. Le nom, lui, est tout récent : c'est le mathématicien français François-Joseph Servois qui a proposé en 1814 les mots « distributif » et « commutatif », pour ranger enfin les règles de calcul par familles.

Définition : la distributivité

La distributivité est la règle qui permet de transformer un produit en somme : $k(a + b) = ka + kb$. Le facteur k multiplie chaque terme de la parenthèse, sans en oublier aucun. L'expression de départ, $k(a + b)$, est une forme factorisée — c'est un produit. L'expression d'arrivée, $ka + kb$, est une forme développée — c'est une somme. Les deux



un rectangle de 3 sur $x + 4$, coupé en deux : $3x$ et 12

L'aire se lit de deux façons : $3 \times (x + 4)$ d'un seul bloc, ou $3x$ à gauche plus 12 carrés à

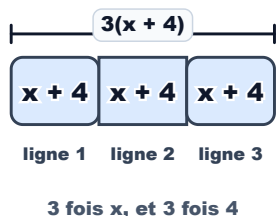
valent exactement la même chose : on a changé l'écriture, pas le nombre.

droite. Même surface, donc $3(x + 4) = 3x + 12$.

Propriétés : la distributivité

Le facteur atteint chaque terme

$3(x + 4)$, ce sont trois lignes de $x + 4$ mises bout à bout. Le 3 multiplie x , mais il multiplie aussi le 4 : $3(x + 4) = 3x + 12$. Écrire $3x + 4$ reviendrait à n'avoir compté qu'une seule ligne sur trois.



Deux parenthèses, quatre produits

Dans $(x + 2)(x + 3)$, chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde : $2 \times 2 = 4$ produits. On obtient $x^2 + 3x + 2x + 6$, qu'il reste à réduire.

Données	$\times$	x	$+ 3$
	x	x^2	$3x$
	$+ 2$	$2x$	6

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6$$

Développer, puis réduire

Après le développement, il reste presque toujours des termes semblables à regrouper. $2x + 5 + 3x$ se réduit en $5x + 5$: on additionne les coefficients, et la lettre ne bouge pas.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & x \\ \hline 3 & x \\ \hline \hline 5 & x \\ \hline \end{array} \\
 + \\
 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & x \\ \hline 3 & x \\ \hline \hline 5 & x \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$2x + 5 + 3x = 5x + 5$$

La forme dit le geste

Une forme factorisée est un produit : il reste une parenthèse à distribuer. Une forme développée est une somme : il n'y a plus rien à ouvrir. $2(x + 7)$ se développe, $5x + 3$ non.

Données	l'expression
	$2(x + 7)$
	$(x + 2)(x + 5)$
	$5x + 3$

la forme factorisée est un produit ; la développée, une somme

La formule : la distributivité

LES DEUX DISTRIBUTIVITÉS

$$k(a + b) = ka + kb$$
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

La première demande deux produits, la seconde quatre. Dans les deux cas, le signe qui précède un facteur part avec lui : $-2(x + 5) = -2x - 10$.

Méthode : la distributivité

1. Reconnaître

On regarde d'abord la forme. Un facteur devant une parenthèse ? Distributivité simple. Deux parenthèses multipliées ? Quatre produits. Une somme sans parenthèse ? Il n'y a rien à développer.

2. Développer

On écrit tous les produits, un par un, sans en sauter : $3(x + 4) = 3 \times x + 3 \times 4$. Écrire cette ligne intermédiaire coûte cinq secondes et évite l'erreur la plus fréquente de la 4^e.

SITUATION
CONCRÈTE



x



x



x

3. Réduire

On regroupe les termes semblables : les x^2 ensemble, les x ensemble, les nombres ensemble. On additionne les coefficients et la lettre reste telle quelle.

2	x	
+	3	x
5	x	

$$2x + 5 + 3x = 5x + 5$$

+



je modélise

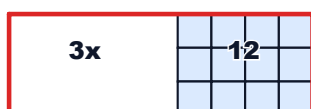
ÉCRITURE
ALGÈBRE

$$\begin{aligned} 3(x + 4) \\ = 3x + \\ 12 \end{aligned}$$

Selon ce que l'on cherche : la distributivité

Calculer une aire

Un rectangle dont un côté s'écrit avec une lettre a une aire qui se développe. C'est la situation la plus fréquente des problèmes : une longueur qu'on augmente, une bande qu'on ajoute.



Calculer de tête

Un nombre proche d'une dizaine ou d'une centaine se coupe en deux :
 $7 \times 102 = 7 \times 100 + 7 \times 2$. La distributivité n'est pas réservée aux lettres.

$$\begin{array}{r} 700 \\ + \quad 14 \\ \hline 714 \end{array}$$

$$7 \times 102 = 7 \times 100 + 7 \times 2$$

Vérifier une factorisation

Développer est le contrôle de la factorisation : si l'on affirme que $4x + 12 = 4(x + 3)$, il suffit de développer $4(x + 3)$ et de voir si l'on retombe sur $4x + 12$.

Données	l'expression
	$2(x + 7)$
	$(x + 2)(x + 5)$
	$5x + 3$

la forme factorisée est un produit ; la développée, une somme

Exemples corrigés : la distributivité

Développer un produit simple

On veut développer $3(x + 4)$.

Quelle expression obtient-on ?

Développer deux parenthèses

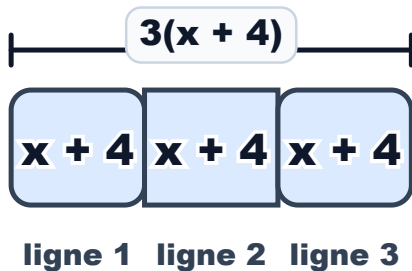
On veut développer et réduire $(x + 2)(x + 3)$.

Quel est le résultat réduit ?

Données	$\times$	x	$+ 3$
	x	x^2	$3x$
	$+ 2$	$2x$	6

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6$$

On effectue les quatre produits : $x \times x = x^2$, $x \times 3 = 3x$, $2 \times x = 2x$ et $2 \times 3 = 6$. On obtient $x^2 + 3x + 2x + 6$. Il reste à réduire : $3x$ et $2x$ sont



3 fois x, et 3 fois 4

On multiplie le 3 par chaque terme de la parenthèse :
 $3 \times x = 3x$, puis $3 \times 4 = 12$. Donc $3(x + 4) = 3x + 12$. Le dessin le dit autrement : trois lignes de $x + 4$ contiennent trois x et trois fois 4, c'est-à-dire 12.

semblables, donc $3x + 2x = 5x$. Le résultat est $x^2 + 5x + 6$.

L'erreur la plus fréquente

Un élève écrit $3(x + 4) = 3x + 4$.

A-t-il raison, et comment le prouver sans discuter ?

Données	pour $x = 1$	$3(x + 4)$	$3x + 4$
	on remplace	3×5	$3 \times 1 + 4$
	on trouve	15	7

$15 \neq 7$: l'égalité $3(x + 4) = 3x + 4$ est fausse

Non. Le 4 n'a pas été multiplié par 3 : la bonne écriture est $3x + 12$. Pour le prouver, on remplace la lettre par un nombre au choix, par exemple $x = 1$: à gauche $3(1 + 4) = 3 \times 5 = 15$, à droite $3 \times 1 + 4 = 7$. Deux résultats différents pour la même valeur de x : l'égalité est fausse. ★ Ce test tranche

n'importe quelle égalité douteuse, et il ne demande aucune règle.

Pièges à éviter : la distributivité

Oublier de multiplier le terme constant : $3(x + 4)$ ne fait pas $3x + 4$, mais $3x + 12$. Le facteur devant la parenthèse multiplie CHAQUE terme, pas seulement la lettre.

Perdre le signe moins : $-2(x + 5)$ fait $-2x - 10$, et non $-2x + 10$. Le signe voyage avec le facteur, et il se distribue lui aussi.

S'arrêter au développement : $(x + 2)(x + 3)$ donne d'abord $x^2 + 3x + 2x + 6$, qui n'est pas une réponse finie. Il reste à réduire : $x^2 + 5x + 6$.

À retenir : la distributivité

Développer, c'est passer d'un produit (forme factorisée) à une somme (forme développée). La distributivité dit comment : $k(a + b) = ka + kb$.

Un produit de deux parenthèses demande QUATRE produits : chaque terme de la première rencontre chaque terme de la seconde.

Développer et réduire sont deux gestes, dans cet ordre : on développe d'abord, on regroupe les termes semblables ensuite.

Exercices corrigés : la distributivité

1. Développer : $3(x + 4)$.

Correction :

Le 3 multiplie chaque terme : $3 \times x + 3 \times 4 = 3x + 12$. ⚠ La réponse $3x + 4$ oublie de multiplier le terme constant.

2. Dans $(x + 2)(x + 5)$, combien de produits doit-on effectuer avant de réduire ?

Correction :

Quatre : $x \times x$, $x \times 5$, $2 \times x$ et 2×5 . Chaque terme de la première parenthèse rencontre chaque terme de la seconde, soit $2 \times 2 = 4$ produits.

3. Quelle est la forme réduite de $2x + 5 + 3x$?

Correction :

$5x + 5$. On regroupe les termes semblables : $2x + 3x = 5x$, et le 5 reste seul puisque ce n'est pas un terme en x . ⚠ La réponse $5x$ oublie la constante, et $6x + 5$ multiplie au lieu d'additionner les coefficients.

4. Parmi $5x + 3$, $2(x + 7)$, $x + 4$ et $3x - 1$, laquelle contient une distributivité à effectuer ?

Correction :

$2(x + 7)$: c'est la seule où un facteur multiplie une parenthèse. Les trois autres sont déjà des sommes, donc des formes développées. En développant : $2(x + 7) = 2x + 14$.

5. Un élève écrit $-2(x + 5) = -2x + 10$. A-t-il raison ?

Correction :

Non. Le signe moins fait partie du facteur et se distribue lui aussi : $-2 \times x = -2x$ et $-2 \times 5 = -10$. La bonne écriture est $-2x - 10$. Contrôle avec $x = 0$: à gauche $-2 \times 5 = -10$, à droite $+10$.