

Les équations — cours de maths 4e

Jusqu'ici, on partait des nombres pour aller vers le résultat. Une équation fait l'inverse : le résultat est donné, et c'est l'un des nombres qui manque. Résoudre, c'est remonter le calcul à l'envers pour retrouver ce nombre-là — et le vérifier. C'est l'aboutissement de tout ce que l'algèbre a mis en place cette année.

LE MOT CLÉ

Une égalité qui contient une inconnue

LE GESTE

La même opération des deux côtés

LA RÈGLE D'OR

Une solution se vérifie, elle ne se croit pas

À quoi ça sert : les équations

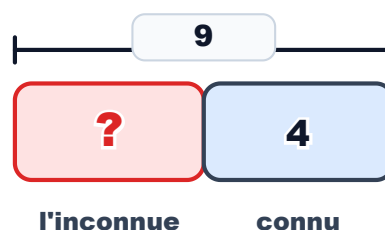
Une équation, c'est la question qu'on se pose vraiment dans la vie : on connaît le résultat, on cherche l'ingrédient. Au marché de Saint-Pierre, des mangues à 3 € l'unité et 21 € payés — combien de mangues ? C'est $3x = 21$, et personne ne le formule ainsi, mais tout le monde divise. C'est aussi le budget d'une sortie dont on connaît le total et une partie des dépenses, la durée d'un trajet dont on connaît l'heure d'arrivée, ou la quantité d'ingrédient à ajouter pour atteindre une masse voulue. L'algèbre ne sert pas à compliquer ces questions : elle sert à les écrire, pour que les difficiles se résolvent comme les faciles.

Un peu d'histoire : les équations

Le signe $=$ n'a que cinq siècles. Il a été inventé en 1557 par le Gallois Robert Recorde, qui en avait assez d'écrire « est égal à » en toutes lettres : il a choisi deux traits parallèles de même longueur, parce que, disait-il, deux choses ne peuvent pas être plus égales que cela. Avant lui, et pendant des siècles, les équations s'énonçaient en phrases. Le premier à avoir noté l'inconnue par un symbole est le Grec Diophante d'Alexandrie, au III^e siècle — d'où le nom d'« équations diophantiennes », encore utilisé aujourd'hui.

Définition : les équations

Une équation est une égalité dans laquelle figure une lettre dont on ne connaît pas la valeur : l'inconnue. Ce qui est écrit à gauche du signe $=$ s'appelle le premier membre, ce qui est à droite le second membre. Résoudre l'équation, c'est trouver la ou les valeurs de l'inconnue qui rendent l'égalité



$$x + 4 = 9$$

VRAIE. ⚠ Une égalité sans inconnue, comme $2 + 7 = 9$, n'est pas une équation : il n'y a rien à chercher.

le tout vaut 9, un morceau vaut 4 — l'autre est l'inconnue

Une équation, c'est un tout que l'on connaît et un morceau qui manque. Ici le total est 9 et l'un des morceaux vaut 4 : la case rouge est x .
 ★ Les deux parts sont dessinées de même largeur, et c'est volontaire — le dessin refuse de faire croire qu'il connaît déjà x .

Propriétés : les équations

Une égalité ET une inconnue

$3x + 2 = 11$ est une équation : il y a un signe $=$ et une lettre à trouver.
 $2 + 7 = 9$ n'en est pas une — c'est un calcul, tout y est connu. Et $3x + 5$ non plus : il manque l'égalité.

Données	l'écriture	c
	$3x + 2 = 11$	i
	$2 + 7 = 9$	d
	$3x + 5$	ii

il faut les DEUX : le signe $=$ et la lettre

Résoudre, c'est défaire

Dans $x + 4 = 9$, le 4 s'ajoute à x . Pour l'enlever, on soustrait 4 — des DEUX côtés, sinon l'égalité est cassée. Il reste $x = 5$. L'opération qui résout est l'inverse de celle qu'on lit.

$$\begin{array}{r} 9 \\ - 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$x + 4 = 9 \text{ donc } x = 9 - 4$$

Réduire avant de résoudre

Dans $2x + 3x = 15$, il n'y a rien à isoler : x apparaît deux fois. On réduit d'abord — $2x + 3x = 5x$ — et l'équation devient $5x = 15$, qu'on sait résoudre.

$$\begin{array}{r} 2x \\ + 3x \\ \hline 5x \end{array}$$

$$2x + 3x = 15 \text{ devient } 5x = 15$$

Une seule valeur convient

Un nombre est solution s'il rend l'égalité vraie, et lui seul. Pour $3x = 9$: 2 donne 6, 4 donne 12, seul 3 donne 9. ⚠ Et 0 peut être solution — pour $3x = 0$, c'est même la bonne réponse.

Données	on essaie $x =$	alors $3x$ vaut
	2	6
	3	9
	4	12

une seule valeur rend l'égalité vraie : c'est la solution

La formule : les équations

LES DEUX GESTES QUI GARDENT L'ÉQUILIBRE

$$x + a = b \text{ donne } x = b - a$$

$$a \cdot x = b \text{ donne } x = \frac{b}{a}$$

On fait toujours la même chose des deux côtés. Ce qui s'ajoutait se retranche, ce qui multipliait divise. ⚠

Pour $5x = 8$, on DIVISE par 5 : on ne soustrait pas 5, sinon $5x$ voudrait dire $5 + x$.

Méthode : les équations

1. Traduire

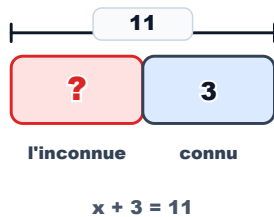
On nomme x ce qu'on cherche, puis on traduit mot à mot : « augmenté de » donne $+$, « le double » donne $2x$, « vaut » donne le signe $=$. « Un nombre augmenté de 3 vaut 11 » s'écrit $x + 3 = 11$.

2. Isoler l'inconnue

On réduit s'il le faut, puis on défait ce qui entoure x , en faisant la même opération des deux côtés. On enlève d'abord ce qui s'ajoute, on divise ensuite par ce qui multiplie.

3. Vérifier

On remplace x par la valeur trouvée dans l'équation de DÉPART, et on calcule les deux membres séparément. S'ils donnent le même nombre, c'est gagné. Ce contrôle prend dix secondes et ne se saute jamais.



Données	l'équation	
	$x + 4 = 9$	
	$x - 3 = 8$	
	$3x = 15$	

devant un produit on DIVISE
— jamais on ne soustrait

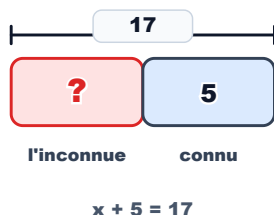
Données	on essaie $x =$	alors $3x$ vaut
	2	6
	3	9
	4	12

une seule valeur rend l'égalité vraie : c'est la solution

Selon ce que l'on cherche : les équations

J'ai pensé à un nombre

« J'ajoute 5 et j'obtiens 17 » : on pose $x + 5 = 17$, on soustrait 5, et le nombre est 12. Le plus dur n'est pas de résoudre — c'est d'écrire l'équation.



Une parenthèse : deux chemins

$2(x + 3) = 14$ se résout de deux façons : diviser les deux côtés par 2, ou développer d'abord. Les deux donnent 4 ; diviser est plus court.

Données	$2(x + 3) = 14$	on divise d'abord
	1re ligne	$x + 3$
	2e ligne	$x = 7$
	on trouve	$x =$

deux routes, la même solution
— la 1re est plus courte

Au marché de Saint-Pierre

Des mangues à 3 € l'unité, 21 € payés : $3x = 21$, donc $x = 7$. Une division qu'on faisait déjà en CM2 — l'équation ne fait que lui donner son nom.

$$21 \div 3$$

quotient : 7 reste : 0

Vérification :
dividende =
diviseur ×
quotient +
reste

$$3x = 21 \text{ donc } x = 21 \div 3$$

Exemples corrigés : les équations

Résoudre une équation simple

On veut résoudre $3x = 15$.

Quelle est la solution ?

Données	l'équation	ce que subit x	on fait l'inverse
	$x + 4 = 9$	on ajoute 4	soustrait 4
	$x - 3 = 8$	on retire 3	ajoute 3
	$3x = 15$	on multiplie par 3	divise par 3

devant un produit on DIVISE — jamais on ne soustrait

Le 3 MULTIPLIE x : on divise donc les deux membres par 3. À gauche, $3x \div 3 = x$; à droite, $15 \div 3 = 5$. La solution est $x = 5$. Vérification dans l'équation de départ : $3 \times 5 = 15$.   On ne soustrait pas 3 : cela reviendrait à croire que $3x$ signifie $3 + x$.

Une parenthèse, deux routes

On veut résoudre $2(x + 3) = 14$.

Par où commencer ?

Données	$2(x + 3) = 14$	on divise d'abord	on développe d'abord
	1re ligne	$x + 3 = 7$	$2x + 6 = 14$
	2e ligne	$x = 7 - 3$	$2x = 8$
	on trouve	$x = 4$	$x = 4$

deux routes, la même solution — la 1re est plus courte

Deux débuts sont possibles, et les deux sont justes.

① Diviser les deux membres par 2 : $x + 3 = 7$, puis $x = 7 - 3 = 4$. ② Développer d'abord : $2x + 6 = 14$, puis $2x = 8$, puis $x = 4$. Le premier chemin est plus court parce qu'il fait disparaître la parenthèse d'un coup. Vérification : $2(4 + 3) = 2 \times 7 = 14$.



Léo a juste, et il a tort

Léo dit : « dans $2x + 3 = 11$, $x = 4$ car $2 + 3 + 4 = 9$ ».

A-t-il raison ?

Données	on essaie $x =$	alors $3x$ vaut	est- ce 9 ?
	2	6	non
	3	9	oui
	4	12	non

une seule valeur rend l'égalité vraie : c'est la solution

Non — et pourtant $x = 4$ EST la bonne solution.
C'est ce qui rend cet exemple précieux : Léo a additionné les trois nombres qu'il voyait, ce qui donne 9 et non 11, et il est tombé sur la bonne réponse par hasard. La vraie méthode : $2x + 3 = 11$, on soustrait 3 des deux côtés, $2x = 8$, on divise par 2, $x = 4$. Et on vérifie en REMPLAÇANT : $2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$. ✅ ★ Trouver le bon nombre ne prouve pas qu'on a compris : c'est la vérification, pas la réponse, qui fait la différence.

Pièges à éviter : les équations

Soustraire au lieu de diviser : dans $5x = 8$, le 5 MULTIPLIE l'inconnue, donc on divise par 5. Écrire « $x = 3$ » revient à croire que $5x$ veut dire $5 + x$.

Ne faire l'opération que d'un seul côté : une équation est un équilibre. Si l'on retire 4 à gauche sans le retirer à droite, l'égalité est cassée et tout ce qui suit est faux.

Résoudre sans avoir réduit : dans $2x + 3x = 15$, il n'y a rien à isoler tant qu'il reste deux termes en x . On réduit d'abord — $5x = 15$ —, on résout ensuite.

À retenir : les équations

Une équation est une égalité qui contient une inconnue. La résoudre, c'est trouver la valeur de la lettre qui rend l'égalité vraie.

On isole l'inconnue en faisant la même opération des deux côtés, et cette opération est l'INVERSE de celle que subit x : ajouter/soustraire, multiplier/diviser.

Une solution se vérifie en la remplaçant dans l'équation de départ. Trouver le bon nombre ne suffit pas : il faut que le chemin soit juste aussi.

Exercices corrigés : les équations

1. Parmi $3x + 5$, $2 + 7 = 9$, $3x + 2 = 11$ et $5 - 2$, laquelle est une équation ?

Correction :

$3x + 2 = 11$. C'est la seule qui possède à la fois un signe $=$ et une inconnue. ⚠ $2 + 7 = 9$ est bien une égalité, mais tout y est connu : c'est un calcul, pas une équation.

2. Traduire en équation : « le double de x est égal à 14 ».

Correction :

$2x = 14$. « Le double » signifie « deux fois », donc $2x$; « est égal à » donne le signe $=$. La solution est ensuite $x = 14 \div 2 = 7$.

3. Résoudre : $2x + 3x = 15$.

Correction :

On réduit d'abord : $2x + 3x = 5x$, donc $5x = 15$. On divise ensuite les deux membres par 5 : $x = 3$.
Vérification : $2 \times 3 + 3 \times 3 = 6 + 9 = 15$. ✓

4. Résoudre : $3(x - 1) = 12$.

Correction :

En divisant les deux membres par 3 : $x - 1 = 4$, donc $x = 4 + 1 = 5$. (En développant d'abord, on obtient $3x - 3 = 12$, puis $3x = 15$, puis $x = 5$ — même résultat.) Vérification : $3(5 - 1) = 3 \times 4 = 12$. ✓

5. Le nombre 0 est-il solution de l'équation $3x = 0$?

Correction :

Oui. En remplaçant : $3 \times 0 = 0$, l'égalité est vraie. ⚠ Zéro est un nombre comme les autres, et il peut parfaitement être la solution d'une équation — il n'y a pas de raison de l'écarter.

6. Un élève dit : « $5x = 8$ donc $x = 3$ ». Explique pourquoi c'est faux.

Correction :

Il a soustrait 5 au lieu de diviser par 5. Or $5x$ signifie « 5 fois x », pas « 5 plus x » : pour isoler x , il faut faire l'opération inverse de la multiplication, donc $x = 8 \div 5 = 1,6$. Vérification : $5 \times 3 = 15$, et non 8 — sa réponse ne passe pas le test.

7. J'ai pensé à un nombre. Si j'ajoute 5, j'obtiens 17. Quel est ce nombre ?

Correction :

On appelle x le nombre cherché, ce qui donne l'équation $x + 5 = 17$. On soustrait 5 des deux côtés :
 $x = 12$. Vérification : $12 + 5 = 17$. ✓