

Équations et inéquations du premier degré

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Une équation a UNE solution, une inéquation en a une INFINITÉ. Les gestes de résolution sont pourtant les mêmes — à une exception près, et c'est elle qui fait perdre des points : diviser par un nombre négatif retourne le sens de l'inégalité.

MOTS CLÉS

Inconnue, solution, inégalité, intervalle

LE SECRET

Le signe change de sens quand on divise par un négatif

OUTIL

Faire la même chose des deux côtés

À quoi ça sert : Équations et inéquations du premier degré

Deux forfaits téléphone : le premier coûte 12 € par mois sans engagement, le second 5 € plus 0,25 € par Go consommé. À partir de combien de Go le second devient-il plus cher ? On résout $5 + 0,25x > 12$, soit $0,25x > 7$, donc $x > 28$. Au-delà de 28 Go, le premier forfait est le bon. ★ La réponse n'est pas un nombre mais un SEUIL — et c'est exactement pourquoi la question s'écrit avec une inéquation et non avec une égalité.

Un peu d'histoire : Équations et inéquations du premier degré

Le mot algèbre vient du titre d'un livre : Al-jabr wa'l-muqābala, écrit à Bagdad vers 820 par al-Khwārizmī. Ses deux mots nomment précisément les deux gestes de la fiche — al-jabr, « la restauration », c'est ajouter la même chose des deux côtés pour faire disparaître un terme négatif ; al-muqābala, « la mise en balance », c'est réduire les termes semblables. Douze siècles plus tard, on résout encore une équation en faisant exactement ces deux choses.

Définition : Équations et inéquations du premier degré

Une ÉQUATION est une égalité contenant une inconnue, souvent notée x : la résoudre, c'est trouver toutes les valeurs de x qui la rendent vraie. Une INÉQUATION est la même chose avec un signe $<$, $\leq$, $>$ ou $\geq$. Du premier degré signifie que x apparaît sans puissance : $3x + 4 = 19$, et jamais x^2 .

Une seule, ou une infinité

Données	$3x + 4 = 19$	$3x + 4 > 19$
type	équation	inéquation
solutions	$x = 5$, une seule	$x > 5$, une infinité
s'écrit	$S = \{5\}$	$S =]5 ; +\infty[$

Mêmes calculs, deux réponses de nature différente : un NOMBRE d'un côté, un INTERVALLE de l'autre. Écrire « $x = 5$ » à une inéquation, c'est répondre à côté.

Propriétés : Équations et inéquations du premier degré

Résoudre une équation : la balance

On peut ajouter, soustraire, multiplier ou diviser par un même nombre non nul DES DEUX CÔTÉS : l'égalité tient. C'est l'image de la balance — ce qu'on fait à gauche, on le fait à droite.

Deux gestes, et c'est fini

Données	$3x + 4 = 19$	$3x = 15$	$x = 5$
on a fait	départ	-4 des deux côtés	$\div 3$ des deux côtés

Résoudre une inéquation : les mêmes gestes

Ajouter ou soustraire un nombre ne change RIEN au sens de l'inégalité. Multiplier ou diviser par un nombre POSITIF non plus. Jusque-là, tout se passe comme pour une équation.

Le sens n'a pas bougé

Données	$2x + 1 > 7$	$2x > 6$	$x > 3$
on a fait	départ	-1	$\div 2$, positif

⚠ Sauf par un NÉGATIF : le sens se retourne

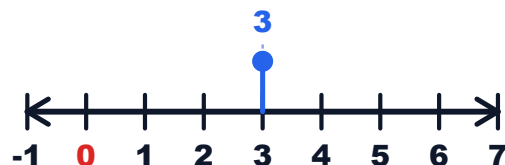
Multiplier ou diviser une inéquation par un nombre négatif RENVERSE l'inégalité. On le voit sur des nombres : $2 < 5$, mais en multipliant par -1 , $-2 > -5$. C'est la seule règle du chapitre sans équivalent chez les équations.

Le symbole bascule

Données	$2 < 5$	$\times(-1)$	$-4x \geq 8$
devient	vrai	$-2 > -5$	$x \leq -2$

L'ensemble des solutions est un intervalle

Une inéquation a une infinité de solutions : on ne les liste pas, on les décrit. $x > 3$ s'écrit $S =]3 ; +\infty[$, et se dessine sur une droite graduée. ⚠ Vers l'infini, le crochet est TOUJOURS ouvert.



Méthode : Équations et inéquations du premier degré

1. Je rassemble les x d'un côté

Tous les termes en x à gauche, tous les nombres à droite. On y arrive en ajoutant ou soustrayant la même chose des deux côtés.

Données	$5x + 3 = 2x + 12$	puis
devient	$5x - 2x = 12 - 3$	$3x = 9$

2. Je divise, et je regarde le signe

Diviser par le coefficient de x . ⚠ S'il s'agit d'une inéquation ET que ce coefficient est négatif, le symbole se retourne à ce moment précis.

Données	$3x = 9$	$-3x > 9$
donne	$x = 3$	$x < -3$

3. Je conclus dans la bonne langue

Une équation se conclut par $S = \{3\}$, une inéquation par un intervalle. Et une équation se VÉRIFIE : je remplace x par ma valeur et je regarde si l'égalité tient.

Données	équation	inéquation
on écrit	$S = \{3\}$	$S =]-\infty ; -3[$

Selon ce que l'on cherche : Équations et inéquations du premier

degré

Mettre un problème en équation

On nomme l'inconnue par une phrase — « soit x le nombre cherché » — puis on traduit l'énoncé mot à mot.
« Le double d'un nombre augmenté de 3 vaut 11 » devient $2x + 3 = 11$.

Mot à mot

Données	le double de x	augmenté de 3	vaut 11
s'écrit	$2x$	$2x + 3$	$2x + 3 = 11$

Traduire en intervalle

Le crochet est fermé quand la borne est atteinte ($\leq$, $\geq$) et ouvert sinon. Vers l'infini, il est toujours ouvert.

Le crochet suit le symbole

Données	$x > 3$	$x \leq -2$	$-1 \leq x < 4$
intervalle	$]3 ; +\infty[$	$] -\infty ; -2]$	$[-1 ; 4[$

Comparer deux quantités

Pour savoir laquelle de A et B est la plus grande, on étudie le SIGNE de $A - B$. Si $A - B > 0$, alors $A > B$. Pour deux nombres strictement positifs, le quotient $\frac{A}{B}$ répond aussi.

Le signe de la différence

Données	positif	nul	négatif
conclusion	$A > B$	$A = B$	$A < B$

Exemples corrigés : Équations et inéquations du premier degré

Une équation avec des x des deux côtés

$$5x + 3 = 2x + 12.$$

Résoudre.

Données	étape 1	étape 2	étape 3
on obtient	$3x + 3 = 12$	$3x = 9$	$x = 3$

Je retire $2x$ des deux côtés : $3x + 3 = 12$. Je retire 3 : $3x = 9$. Je divise par 3 : $x = 3$. Vérification : $5 \times 3 + 3 = 18$ et $2 \times 3 + 12 = 18$ — l'égalité tient. Donc $S = \{3\}$.

Une inéquation qui se retourne

$$-4x + 1 \geq 9.$$

Résoudre.

Données	$-4x \geq 8$	$\div(-4)$	résultat
signe	$\geq$	il bascule	$x \leq -2$

Je retire 1 : $-4x \geq 8$ — le sens n'a pas bougé, on n'a fait qu'une soustraction. Je divise par -4 , et LÀ le symbole se retourne : $x \leq -2$. Donc $S =] -\infty ; -2]$. ⚠ Le contrôle : je remplace x par -3 , qui est bien ≤ -2 ; $-4 \times (-3) + 1 = 13 \geq 9$, c'est vrai.

Du symbole à l'intervalle

S est l'ensemble des x tels que $x \leq 4$.

Écrire S sous forme d'intervalle.

Données	borne	atteinte ?	vers
$x \leq 4$	4	oui	$-\infty$

La borne 4 est atteinte, donc le crochet est FERMÉ de son côté ; du côté de $-\infty$ il est ouvert, comme toujours. Donc $S =] -\infty ; 4]$. ⚠ Le crochet fermé se tourne vers l'intérieur — écrire $[-\infty ; 4]$ n'a pas de sens : l'infini n'est pas un nombre, il ne peut pas être atteint.

Un problème mis en équation

La somme de deux entiers consécutifs vaut 47.

Quels sont ces deux entiers ?

Données	le petit	le grand	leur somme
s'écrit	x	$x + 1$	$2x + 1 = 47$

Soit x le plus petit des deux entiers ; le suivant vaut $x + 1$. L'énoncé donne $x + (x + 1) = 47$, soit $2x + 1 = 47$, puis $2x = 46$ et $x = 23$. Les deux entiers sont 23 et 24. Vérification : $23 + 24 = 47$. ★ La phrase « soit x le plus petit » n'est pas décorative : sans elle, la réponse ne veut rien dire.

Pièges à éviter : Équations et inéquations du premier degré

- ➖ Diviser une inéquation par un NÉGATIF retourne le symbole. $-2x > 6$ donne $x < -3$, et non $x > -3$. C'est l'erreur la plus coûteuse du chapitre.
- ➖ Ajouter ou soustraire ne retourne JAMAIS rien. Seules la multiplication et la division par un négatif basculent le sens.
- ➖ Une inéquation ne se conclut pas par $x = 3$. Sa réponse est un intervalle : il y a une infinité de solutions, pas une.
- ➖ Vers l'infini, le crochet est toujours OUVERT. $[3 ; +\infty]$ n'existe pas : $+\infty$ n'est pas un nombre.
- ➖ Dans une mise en équation, on écrit d'abord ce que x DÉSIGNE. Sans cette phrase, un résultat juste ne répond à aucune question.
- ➖ On ne « passe » pas un terme de l'autre côté par magie : on ajoute ou on soustrait la même chose des deux côtés. C'est le même geste, mais le dire ainsi évite les erreurs de signe.

À retenir : Équations et inéquations du premier degré

On fait la même chose DES DEUX CÔTÉS : c'est le seul geste autorisé.

Une équation a une solution, une inéquation en a une infinité.

- ➖ Multiplier ou diviser une inéquation par un négatif RETOURNE le symbole.

L'ensemble des solutions s'écrit en intervalle : $S =]3 ; +\infty[$.

Crochet fermé si la borne est atteinte, ouvert sinon — et toujours ouvert vers l'infini.

Pour comparer A et B , j'étudie le signe de $A - B$.

Exercices corrigés : Équations et inéquations du premier degré

1. Résoudre $4x + 5 = 21$.

Correction :

$4x = 16$ puis $x = 4$. Vérification : $4 \times 4 + 5 = 21$. Donc $S = \{4\}$.

2. Résoudre $7x - 3 = 4x + 9$.

Correction :

Je retire $4x$: $3x - 3 = 9$. J'ajoute 3 : $3x = 12$, donc $x = 4$. Vérification : $7 \times 4 - 3 = 25$ et $4 \times 4 + 9 = 25$.

3. Résoudre $3(x + 2) = 18$.

Correction :

Je développe : $3x + 6 = 18$, donc $3x = 12$ et $x = 4$. (On pouvait aussi diviser d'emblée par 3 : $x + 2 = 6$.)

4. Résoudre $5x + 2 > 17$.

Correction :

$5x > 15$, puis $x > 3$ — le 5 est positif, le sens ne bouge pas. $S =]3 ; +\infty[$.

5. Résoudre $-3x \geq 12$.

Correction :

Je divise par -3 : le symbole se RETOURNE, donc $x \leq -4$. $S =]-\infty ; -4]$. Contrôle : $x = -5$ donne $15 \geq 12$, vrai.

6. Résoudre $2x + 9 < 5x - 3$.

Correction :

Je retire $2x$: $9 < 3x - 3$. J'ajoute 3 : $12 < 3x$, donc $4 < x$, c'est-à-dire $x > 4$. $S =]4 ; +\infty[$.

7. Écrire l'ensemble des x tels que $-1 \leq x < 6$ sous forme d'intervalle.

Correction :

$[-1 ; 6[$. La borne -1 est atteinte, donc crochet fermé ; la borne 6 ne l'est pas, donc crochet ouvert.

8. La somme de trois entiers consécutifs vaut 72. Quels sont-ils ?

Correction :

Soit x le plus petit : $x + (x + 1) + (x + 2) = 72$, soit $3x + 3 = 72$, donc $x = 23$. Ce sont 23, 24 et 25.

9. Un rectangle a une longueur qui dépasse sa largeur x de 4 cm et un périmètre de 36 cm. Quelle est sa largeur ?

Correction :

Le périmètre vaut $2(x + x + 4) = 36$, soit $4x + 8 = 36$, donc $4x = 28$ et $x = 7$ cm. La longueur vaut alors 11 cm — et $2 \times (7 + 11) = 36$.

10. On a $A = 3x + 5$ et $B = 3x - 2$. Lequel est le plus grand ?

Correction :

$A - B = (3x + 5) - (3x - 2) = 7$, qui est strictement positif quel que soit x . Donc $A > B$ toujours — les $3x$ se sont éliminés, la comparaison ne dépend pas de x .