

La factorisation — cours de maths 4e

Développer transforme un produit en somme ; factoriser fait le chemin inverse. On part de $3x + 12$ et on retrouve $3(x + 4)$ — c'est-à-dire qu'on remonte d'une aire vers les côtés du rectangle qui la produit. Deux gestes suffisent : trouver ce qui est commun à tous les termes, et diviser chacun par lui. Aucun terme n'est laissé de côté, et c'est là que tout se joue.

LE MOT CLÉ

D'une somme vers un produit

LE GESTE

Trouver le facteur commun, diviser CHAQUE terme

LA RÈGLE D'OR

On vérifie toujours en développant

À quoi ça sert : la factorisation

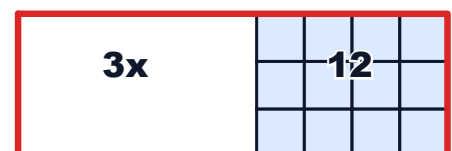
Factoriser, c'est d'abord regrouper ce qui se répète — et c'est un réflexe de calcul mental. $17 \times 25 + 3 \times 25$ ne se calcule pas en deux multiplications : le 25 est commun, donc c'est $(17 + 3) \times 25 = 20 \times 25 = 500$. Le même geste sert dès qu'on compte des lots identiques : pour une sortie scolaire à La Réunion, quatre groupes qui prennent chacun x bouteilles d'eau et 3 fruits emportent $4(x + 3)$ objets, et cette écriture-là dit quelque chose que $4x + 12$ ne dit pas — qu'il y a quatre groupes. Enfin, la factorisation est la clé de la résolution : en 3^e puis au lycée, un produit qui vaut zéro oblige l'un de ses facteurs à valoir zéro, et c'est ainsi qu'on résout les équations du second degré.

Un peu d'histoire : la factorisation

Le mot « facteur » vient du latin factor, « celui qui fait » — le même que dans manufacture. Retrouver un produit derrière une somme est un geste très ancien : c'est ainsi qu'al-Khwarizmi, à Bagdad au IX^e siècle, résolvait les équations du second degré, en « complétant le carré », c'est-à-dire en ajoutant juste ce qu'il fallait pour qu'une somme redevienne l'aire d'un carré. Il n'y avait alors ni lettres ni signes : tout s'énonçait en phrases, et se démontrait en découpant une figure — celle de cette fiche.

Définition : la factorisation

Factoriser une expression, c'est l'écrire sous la forme d'un **PRODUIT** alors qu'elle se présente comme une **SOMME**. C'est exactement l'opération inverse du développement : $3(x + 4) = 3x + 12$ se lit dans un sens, $3x + 12 = 3(x + 4)$ dans



on connaît l'aire, $3x$ et 12 : on cherche les côtés

l'autre. Le nombre — ou la lettre — qu'on met devant la parenthèse s'appelle le facteur commun : c'est ce qui divise tous les termes à la fois.

C'est le rectangle de la fiche de distributivité, retourné. Là-bas on connaissait les côtés, 3 et $x + 4$, et on cherchait l'aire. Ici l'aire est donnée en deux morceaux, et il faut remonter aux côtés : $3x + 12 = 3(x + 4)$.

Propriétés : la factorisation

L'inverse du développement

Développer et factoriser ne sont pas deux chapitres, mais deux flèches sur la même égalité. Un produit d'un côté, une somme de l'autre — et la même égalité reste vraie pour toutes les valeurs de x .

Données	on part de	on fait
	$3(x + 4)$	développer
	$3x + 12$	factoriser

un produit d'un côté, une somme de l'autre

Le facteur doit diviser TOUS les termes

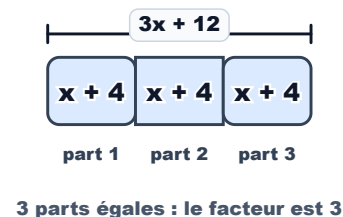
Dans $6x + 9$, le facteur commun n'est pas 6 : 6 ne divise pas 9. C'est 3, qui divise les deux. Et le facteur peut être une lettre : dans $x^2 + 5x$, c'est x .

Données	l'expression
	$3x + 12$
	$6x + 9$
	$x^2 + 5x$

dans $6x + 9$ ce n'est pas 6 : 6 ne divise pas 9

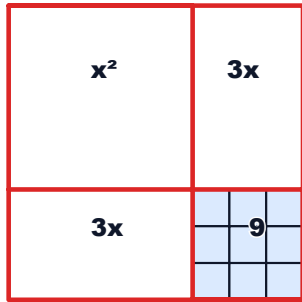
Un partage en parts égales

Factoriser par 3, c'est couper la somme en trois morceaux rigoureusement identiques. Chacun vaut $x + 4$, donc le tout vaut $3 \times (x + 4)$. Le facteur, c'est le NOMBRE de parts.



Quand le puzzle se referme

$x^2 + 6x + 9$ n'a aucun facteur commun — et pourtant il se factorise. Ses quatre morceaux forment exactement un carré de côté $x + 3$: c'est une identité remarquable, lue à l'envers.



La formule : la factorisation

LES TROIS FACTORISATIONS

$$\begin{aligned}
 ka + kb &= k(a + b) \cdot \\
 x^2 + 2ax + a^2 &= (x + a)^2 \\
 \cdot x^2 - a^2 &= (x - a)(x + a)
 \end{aligned}$$

Ce sont les égalités du développement, lues de droite à gauche. La première marche toujours, dès qu'il y a un facteur commun ; les deux autres ne s'utilisent que si l'on reconnaît la forme.

Méthode : la factorisation

1. Chercher ce qui est commun

On regarde chaque terme et on cherche ce qui les divise TOUS : un nombre, une lettre, ou les deux. On prend le plus grand — sinon la factorisation est incomplète et devra être refaite.

2. Diviser chaque terme

On écrit le facteur devant la parenthèse, puis on divise chaque terme par lui et on note le résultat dans la parenthèse. Une ligne par terme : c'est ce qui rend l'oubli impossible.

Données	le terme	divisé par
	3x	3x ÷

3. Vérifier en développant

On développe le produit obtenu. Si l'on retombe exactement sur l'expression de départ, la factorisation est juste ; sinon, un terme a été mal divisé. Ce contrôle prend cinq secondes et ne se saute jamais.

Données	l'expression
	$3x + 12$
	$6x + 9$
	$x^2 + 5x$

dans $6x + 9$ ce n'est pas $6 : 6$
ne divise pas 9

Données	le terme	divis par
	12	$12 \div$

$3x + 12 = 3(x + 4)$: les DEUX
termes sont divisés

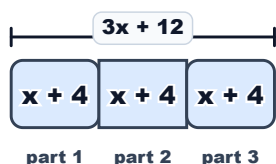
Données	la proposition
	$4x + 12 = 4(x + 3)$
	$5x + 20 = 5(x + 20)$

on développe le produit, et on
compare au départ

Selon ce que l'on cherche : la factorisation

Simplifier une écriture

Une forme factorisée est plus
courte, et surtout plus parlante :
 $4(x + 3)$ dit qu'il y a quatre
groupes identiques, ce que $4x +$
 12 ne dit plus.



3 parts égales : le facteur est 3

Calculer de tête

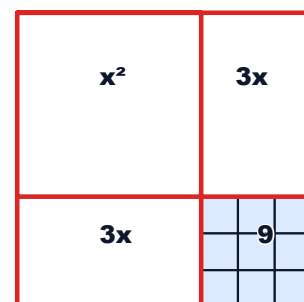
$17 \times 25 + 3 \times 25$: le 25 est
commun, donc c'est $(17 + 3) \times$
 $25 = 500$. Deux multiplications
remplacées par une addition et une
multiplication.

$$\begin{array}{r} \times \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 2 & 0 \\ \hline & 2 & 5 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$17 \times 25 + 3 \times 25 = (17 + 3) \times 25$$

Reconnaître une identité

Trois termes dont le premier et le
dernier sont des carrés ? Deux
termes séparés par un moins, tous
deux carrés ? Ce sont les
signatures des identités
remarquables lues à l'envers.



Exemples corrigés : la factorisation

Factoriser une somme simple

On veut factoriser $3x + 12$.

Quel est le facteur commun, et que reste-t-il ?

Factoriser avec une identité

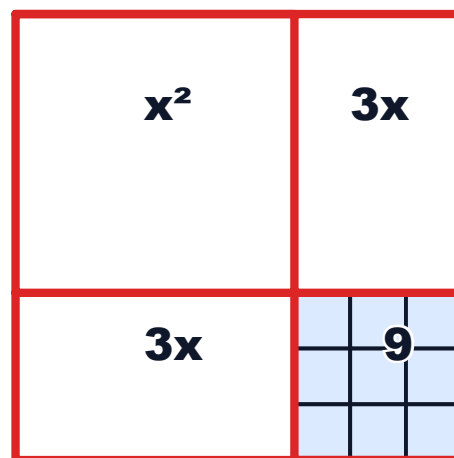
On veut factoriser $x^2 + 6x + 9$.

Quel produit reconnaît-on ?

Données	le terme	divisé par 3	il reste
	$3x$	$3x \div 3$	x
	12	$12 \div 3$	4

$3x + 12 = 3(x + 4)$: les DEUX termes sont divisés

Le facteur commun est 3 : il divise $3x$ et il divise 12.
On divise ensuite chaque terme par 3 : $3x \div 3 = x$,
et $12 \div 3 = 4$. Donc $3x + 12 = 3(x + 4)$.
Contrôle en développant : $3 \times x + 3 \times 4 = 3x + 12$. ✓



Il n'y a aucun facteur commun aux trois termes. Mais le premier est un carré (x^2), le dernier aussi ($9 = 3^2$), et celui du milieu vaut exactement le double produit ($2 \times x \times 3 = 6x$). C'est donc le carré d'une somme : $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$. Le dessin le confirme — les quatre morceaux forment un carré de côté $x + 3$.
Contrôle en développant : $(x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9$. ✓

L'erreur miroir

Un élève écrit $5x + 20 = 5(x + 20)$.

Où est l'erreur, et comment l'aurait-il vue tout seul ?

Données	la proposition	on développe
	$4x + 12 = 4(x + 3)$	$4x + 12$
	$5x + 20 = 5(x + 20)$	$5x + 100$

on développe le produit, et on compare au départ

Il a divisé le premier terme et recopié le second : 20 doit être divisé par 5 aussi, ce qui donne 4. La bonne factorisation est $5(x + 4)$. ★ Et c'est exactement l'erreur de la fiche de distributivité, retournée : là on

oubliait de MULTIPLIER le second terme, ici on oublie de le DIVISER. Le contrôle l'aurait montré tout de suite : $5(x + 20) = 5x + 100$, et non $5x + 20$.

Pièges à éviter : la factorisation

Oublier de diviser le second terme : $5x + 20$ ne fait pas $5(x + 20)$, mais $5(x + 4)$. C'est l'erreur miroir de celle du développement — là onoubliait de multiplier le 4, ici on oublie de diviser le 20.

Se contenter du premier facteur venu : dans $6x + 9$, le facteur commun n'est pas 6, parce que 6 ne divise pas 9. C'est 3, et la factorisation est $3(2x + 3)$.

Oublier que la lettre aussi peut être en facteur : dans $x^2 + 5x$, le facteur commun est x , et le résultat est $x(x + 5)$. Dans $2x^2 + 6x$, c'est $2x$, donc $2x(x + 3)$.

À retenir : la factorisation

Factoriser, c'est l'opération inverse de développer : on part d'une somme et on arrive à un produit.

Le facteur commun doit diviser TOUS les termes, et on cherche le plus grand. Chaque terme est ensuite divisé par lui — aucun n'est laissé de côté.

Une factorisation se vérifie toujours en développant le produit obtenu : si l'on retombe sur l'expression de départ, elle est juste.

Exercices corrigés : la factorisation

1. Dans l'expression $3x + 12$, quel est le facteur commun ?

Correction :

3, car 3 divise $3x$ et 3 divise 12. ⚠ Ce n'est pas 12 : 12 ne divise pas $3x$. Le facteur commun doit diviser les DEUX termes.

2. Factoriser : $5x - 20$.

Correction :

$5(x - 4)$. Le facteur commun est 5 ; on divise chaque terme : $5x \div 5 = x$ et $20 \div 5 = 4$. Le signe moins reste dans la parenthèse. Contrôle : $5(x - 4) = 5x - 20$. ✓

3. Factoriser : $x^2 + 5x$.

Correction :

$x(x + 5)$. Ici le facteur commun n'est pas un nombre mais une LETTRE : x divise x^2 (il reste x) et divise $5x$ (il reste 5). Contrôle : $x \times x + x \times 5 = x^2 + 5x$. ✓

4. Factoriser : $x^2 - 25$.

Correction :

$(x - 5)(x + 5)$. Deux termes séparés par un moins, tous deux des carrés ($25 = 5^2$) et aucun terme en x : c'est une différence de deux carrés. Contrôle : $x^2 + 5x - 5x - 25 = x^2 - 25$. ✓

5. La factorisation $3x + 15 = 3(x + 15)$ est-elle correcte ?

Correction :

Non. En développant, $3(x + 15) = 3x + 45$, et non $3x + 15$. Le 15 n'a pas été divisé par 3 : la bonne réponse est $3(x + 5)$.