

Fonctions affines

cours et exercices corrigés de maths 3e

En quatrième, on disait « le prix dépend de la distance ». En troisième, on l'écrit : $f(x) = 2x + 4$. C'est le même taxi, la même prise en charge, le même prix au kilomètre — mais l'écriture permet enfin de calculer n'importe quel trajet sans refaire le raisonnement, et de tracer une droite qui répond d'un coup d'œil.

LA FORME

$f(x) = ax + b$ — le a
multiplie, le b s'ajoute

CE QUE FAIT CHAQUE NOMBRE

a incline la droite • b dit où
elle coupe l'axe vertical

LE PIÈGE

Toute fonction linéaire est
affine ; l'inverse est faux

À quoi ça sert : Fonctions affines

Toute offre à part fixe et part variable est une fonction affine, et il y en a partout : un abonnement téléphonique, une salle d'escalade qui demande une inscription puis un prix par séance, un taxi, une facture d'électricité avec son abonnement et ses kilowattheures. La question utile n'est jamais « quelle offre est la moins chère » — elle n'a pas de réponse en soi — mais « à partir de combien cette offre devient-elle la meilleure ». C'est exactement ce que donne le point où deux droites se croisent, et c'est un raisonnement qu'un adulte refait toute sa vie devant deux contrats. À La Réunion, le même calcul décide entre une location de paddle à l'heure et un forfait à la journée, ou entre deux formules de transport pour se rendre au travail. Les fonctions affines servent aussi à prévoir : quand une grandeur augmente d'une quantité constante — une plante qui pousse de 2 cm par semaine, un réservoir qui se remplit de 5 litres par minute —, la droite permet de lire la valeur à n'importe quel moment sans tout recalculer.

Un peu d'histoire : Fonctions affines

L'idée qu'une relation entre deux grandeurs puisse s'écrire comme une équation est de Descartes, en 1637 : c'est lui qui relie une COURBE et une FORMULE, et fait de la géométrie et du calcul deux langues pour dire la même chose. Mais la notation $f(x)$, elle, est d'Euler, en 1734 — près d'un siècle plus tard. Avant lui, on décrivait les fonctions par des phrases ou par des tableaux, ce qui rendait tout calcul général presque impossible à écrire. Le mot « affine » vient du latin **affinis**, « voisin, apparenté » : une transformation affine préserve l'alignement et les rapports de longueurs, elle « garde la parenté » entre les points. C'est aussi pour cela que le graphique reste une droite — une fonction affine ne courbe rien, elle se contente d'incliner et de décaler. Ce vocabulaire, formalisé au dix-neuvième siècle, décrit donc exactement ce que l'œil voit sur le dessin.

Définition : Fonctions affines

x

0

1

2

3

4

Une fonction **AFFINE** s'écrit $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres fixés. Sa représentation graphique est une **DROITE** — toujours. Quand $b = 0$, on écrit $f(x) = ax$ et la fonction est dite **LINÉAIRE** : sa droite passe par l'origine. ⚠ Une fonction linéaire est donc un cas **PARTICULIER** de fonction affine, exactement comme un carré est un rectangle particulier. L'inclusion ne marche que dans un sens.

f(x)

4

6

8

?

12

que vaut $f(3)$ pour $f(x) = 2x + 4$?

de colonne en colonne, on ajoute toujours 2 : c'est le coefficient directeur

Le tableau montre ce que la formule cache : d'une colonne à la suivante, la valeur augmente **TOUJOURS** de la même quantité. Cette augmentation constante est le coefficient directeur a — et c'est elle qui fait que le graphique est une droite, et non une courbe.

Propriétés : Fonctions affines

Affine, linéaire, ou ni l'un ni l'autre

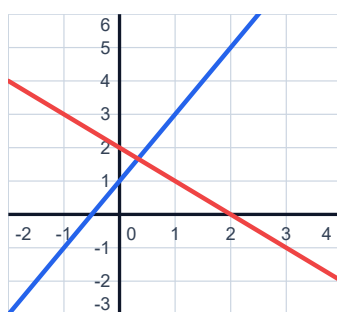
Une fonction est **AFFINE** si son écriture est de la forme $ax + b$ — un x à la puissance un, rien d'autre. Elle est **LINÉAIRE** si en plus $b = 0$. ⚠ $f(x) = x^2$ n'est ni l'une ni l'autre : le carré casse tout, et son graphique n'est plus une droite.

expression	elle est
$3x + 5$	affine
$4x$	linéaire (donc affine)
7	affine ($a = 0$)
$x^2 + 1$	ni l'une ni l'autre

le carré casse tout

Le coefficient directeur incline la droite

Dans $f(x) = ax + b$, le nombre a est le **COEFFICIENT DIRECTEUR**. Il dit de combien on monte quand on avance de 1. Positif, la droite monte ; négatif, elle descend ; nul, elle est horizontale. ⭐ Plus a est grand en valeur absolue, plus la droite est raide.



en bleu $a = 2$: elle monte
en rouge $a = -1$: elle descend

L'ordonnée à l'origine est l'image de 0

Dans $f(x) = ax + b$, le nombre b est l'**ORDONNÉE À L'ORIGINE** : c'est là que la droite coupe l'axe vertical. ⭐ Et ce n'est pas une définition à part — c'est simplement $f(0)$, puisque $a \times 0 + b = b$. Le mot compliqué désigne le calcul le plus simple de la fiche.

fonction	$f(0)$	coupe l'axe en
$3x + 5$	5	5
$-2x - 4$	-4	-4
$4x$	0	l'origine

linéaire : elle passe par l'origine

Calculer une image : on remplace, on calcule

Deux points suffisent à tout retrouver

Si l'on connaît deux valeurs, on retrouve a et b . Le coefficient

Sur un graphique, tout se lit

L'ordonnée à l'origine se lit là où la droite coupe l'axe vertical. Le

Pour trouver $f(4)$ quand $f(x) = 2x + 3$, on remplace x par 4 partout, puis on calcule : $2 \times 4 + 3 = 11$. ⚠ L'ordre des opérations compte — on multiplie AVANT d'ajouter. Écrire $(2 + 3) \times 4$ donnerait 20, et ce serait une autre fonction.

étape	calcul
on remplace	$2 \times 4 + 3$
on multiplie	$8 + 3$
on ajoute	11

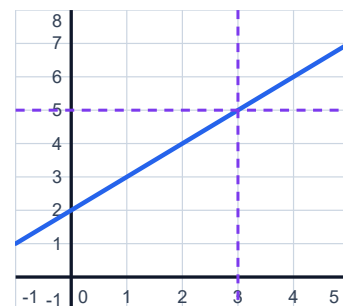
multiplier d'abord, ajouter ensuite

directeur est l'écart des images divisé par l'écart des antécédents. Puis b se déduit en remplaçant dans l'une des deux. ★ C'est ce qui rend une fonction affine si commode : deux mesures, et toute la droite est connue.

on sait	on trouve
$f(0) = 4$	$b = 4$
$f(3) = 10$	$a = (10 - 4) \div 3 = 2$
donc	$f(x) = 2x + 4$

deux points, une droite

coefficient directeur se lit en avançant de 1 vers la droite et en regardant de combien on monte. ⚠ Pour trouver une image, on part de l'axe horizontal, on MONTE jusqu'à la droite, puis on lit à gauche. Le trajet inverse donne l'antécédent.



on part de 3, on MONTE jusqu'à la droite, on lit 5 à gauche

Une part fixe et une part variable

Dès qu'une situation a un montant de départ ET un montant par unité, elle est affine. Un taxi à Saint-Pierre : 4 € de prise en charge, puis 2 € par kilomètre. La prise en charge est le b , le prix au kilomètre est le a . ★ Reconnaître ces deux parts dans un énoncé, c'est déjà avoir écrit la fonction.

dans l'énoncé	dans la fonction
prise en charge : 4 €	$b = 4$
2 € par kilomètre	$a = 2$
donc	$f(x) = 2x + 4$

La formule : Fonctions affines

UNE FONCTION AFFINE

$$f(x) = ax + b$$

Deux nombres suffisent à tout dire. Le a incline la droite — il donne de combien on monte quand on avance de 1. Le b la décale verticalement — c'est l'image de 0, donc le point où elle coupe l'axe vertical. Changer l'un ou l'autre change la droite, et rien d'autre ne la change.

le nombre	ce qu'il fait
a	l'inclinaison
b	la hauteur au départ
$b = 0$	linéaire : passe par l'origine

deux nombres, une droite

Méthode : Fonctions affines

1. Reconnaître une fonction affine

On regarde l'écriture : un x tout seul, multiplié par un nombre, plus un nombre. Pas de x^2 , pas de x au dénominateur, pas de racine. ★ Si $b = 0$, elle est linéaire — donc affine aussi.

on voit	verdict
$ax + b$	affine
ax	linéaire, donc affine
x^2 ou $1/x$	ni l'une ni l'autre

le x doit être seul

2. Calculer une image

On remplace x par la valeur donnée, PARTOUT où il apparaît, puis on calcule en respectant les priorités : la multiplication avant l'addition.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	7	9	?

que vaut $f(4)$ pour $f(x) = 2x + 3$?

3. Retrouver l'expression

Le coefficient directeur est l'écart des images divisé par l'écart des antécédents. Une fois a connu, on remplace dans l'une des deux égalités pour trouver b . ★ Contrôle final : la formule trouvée doit redonner LES DEUX points, pas seulement celui qui a servi.

étape	ce qu'on fait
1	$a = \text{écart des images} \div \text{écart des } x$
2	on remplace pour trouver b
3	on vérifie sur les DEUX points

vérifier sur les deux, pas un

4. Remonter à l'antécédent

On connaît $f(x)$ et on cherche x :
on défait les opérations dans l'ordre INVERSE. On retire d'abord b , puis on divise par a . ⚠ Diviser directement par a sans retirer b est l'erreur la plus fréquente.

x	0	1	2	?	4
$f(x)$	3	5	7	9	11

de quel nombre vient 9 ?

5. Comparer deux offres

On écrit les deux fonctions, on calcule pour la valeur demandée, on compare. Pour trouver le point de BASCULE, on cherche quand les deux donnent le même résultat.
★ Il n'y a pas de meilleure offre en soi : la réponse dépend du nombre, et c'est tout l'intérêt du chapitre.

heures	A : $3x+8$	B : $5x$
2	14 €	10 €
4	20 €	20 €
6	26 €	30 €

à 4 h, les deux se valent

Selon ce que l'on cherche : Fonctions affines

On me donne l'expression et une valeur

Je remplace et je calcule, en multipliant avant d'ajouter. C'est le sens direct.

On me donne le résultat et je cherche le départ

Je défais à l'envers : je retire d'abord b , puis je divise par a .

On me donne deux points ou un graphique

Le coefficient directeur vient de l'écart des images sur l'écart des x ; l'ordonnée à l'origine se lit sur l'axe vertical.

On me décrit une situation

Je cherche la part FIXE, qui donne b , et la part PAR UNITÉ, qui donne a . La fonction est écrite.

Exemples corrigés : Fonctions affines

Le taxi de Saint-Pierre

Un taxi facture 4 € de prise en charge, puis 2 € par kilomètre.

Écrire la fonction, puis calculer le prix d'un trajet de 7 km.

distance	prix
0 km	4 €
7 km	18 €

La prise en charge est le montant FIXE : c'est $b = 4$.

Le prix au kilomètre est le montant PAR UNITÉ : c'est $a = 2$. Donc $f(x) = 2x + 4$, où x est la distance en kilomètres. Pour 7 km : $f(7) = 2 \times 7 + 4 = 14 + 4 = 18$ €. ★ Le contrôle tient en une ligne : pour 0 km, $f(0) = 4$ € — c'est bien la prise en charge, payée avant même de rouler. Si la formule ne redonne pas le montant fixe pour $x = 0$, c'est qu'on a mélangé a et b .

Retrouver la fonction à partir de deux points

Une fonction affine vérifie $f(0) = 4$ et $f(3) = 10$.

Quelle est son expression ?

on sait	on en tire
$f(0) = 4$	$b = 4$
$f(3) = 10$	$a = 2$

L'ordonnée à l'origine est immédiate : $f(0) = b$, donc $b = 4$. Pour le coefficient directeur, on divise l'écart des images par l'écart des antécédents : $a = \frac{10 - 4}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2$. Donc $f(x) = 2x + 4$. ★
 Contrôle sur LES DEUX points, pas un seul :
 $f(0) = 2 \times 0 + 4 = 4$ ✓ et $f(3) = 2 \times 3 + 4 = 10$ ✓. Vérifier sur le point qui a servi au calcul ne prouve rien — c'est l'autre qui valide.

Deux loueurs, un point de bascule

Tarif A : $f(x) = 3x + 8$. Tarif B : $g(x) = 5x$.

À partir de combien d'heures le tarif A devient-il plus intéressant ?

heures	A	B
2	14 €	10 €
4	20 €	20 €
6	26 €	30 €

On cherche quand les deux coûtent pareil : $3x + 8 = 5x$, donc $8 = 2x$, donc $x = 4$. À 4 heures, les deux tarifs donnent 20 € : c'est le point de bascule.
 Avant 4 heures, B est moins cher — il n'a pas de frais de départ. Après 4 heures, A devient plus intéressant, parce qu'il augmente moins vite : 3 € par heure

contre 5 €. ★ C'est le coefficient directeur qui décide à long terme, et l'ordonnée à l'origine qui décide au début. Une offre avec un abonnement finit toujours par gagner si son prix unitaire est plus bas — la seule question est : à partir de quand.

Pièges à éviter : Fonctions affines

Croire qu'une fonction linéaire n'est pas affine. Elle l'est : c'est le cas où $b = 0$.

Prendre $x^2 + 1$ pour une fonction affine. Le carré casse tout, et le graphique n'est plus une droite.

Ajouter avant de multiplier dans $f(x) = 2x + 3$. On calcule $2 \times x$ d'abord.

Diviser par a sans retirer b pour remonter à l'antécédent. On défait dans l'ordre inverse.

Confondre le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine. Le premier incline, le second décale.

Vérifier une expression trouvée sur le point qui a servi au calcul. C'est l'AUTRE point qui la valide.

Chercher « la meilleure offre » sans dire pour combien. La réponse change avec le nombre.

À retenir : Fonctions affines

Une fonction affine s'écrit $f(x) = ax + b$, et son graphique est TOUJOURS une droite.

Une fonction linéaire est le cas $b = 0$: elle est affine, et sa droite passe par l'origine.

Le coefficient directeur a dit de combien on monte quand on avance de 1.

L'ordonnée à l'origine b est simplement $f(0)$ — le point où la droite coupe l'axe vertical.

Pour une image : on remplace, puis on multiplie AVANT d'ajouter.

Pour un antécédent : on retire b , PUIS on divise par a .

Deux points suffisent à retrouver toute la droite — et on vérifie sur les deux.

Une situation à part fixe et part variable est toujours affine : le fixe donne b , l'unitaire donne a .

Exercices corrigés : Fonctions affines

1. Parmi $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = x^2 - 1$ et $h(x) = 4x$, lesquelles sont affines ?

Correction :

f et h . h est même linéaire, donc affine aussi. g ne l'est pas : le carré empêche le graphique d'être une droite.

2. Quel est le coefficient directeur de $f(x) = -2x + 5$?

Correction :

-2 . Il est négatif, donc la droite DESCEND : quand x augmente de 1, $f(x)$ diminue de 2.

3. Quelle est l'ordonnée à l'origine de $f(x) = 3x - 4$?

Correction :

-4 , car $f(0) = 3 \times 0 - 4 = -4$. La droite coupe l'axe vertical en -4 .

4. Soit $f(x) = 2x + 3$. Calculer $f(4)$.

Correction :

$2 \times 4 = 8$, puis $8 + 3 = 11$. Donc $f(4) = 11$.

5. Soit $f(x) = 2x + 3$. Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = 17$?

Correction :

On défait à l'envers : $17 - 3 = 14$, puis $14 \div 2 = 7$. Donc $x = 7$.

6. Une fonction affine a pour coefficient directeur 3 et pour ordonnée à l'origine -5 . Quelle est son expression ?

Correction :

$f(x) = 3x - 5$.

7. Une fonction affine vérifie $f(1) = 5$ et $f(4) = 14$. Quelle est son expression ?

Correction :

$a = \frac{14 - 5}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$. Puis $f(1) = 3 \times 1 + b = 5$, donc $b = 2$. Donc $f(x) = 3x + 2$. Contrôle : $f(4) = 12 + 2 = 14 \checkmark$.

8. Sur un graphique, comment lit-on l'ordonnée à l'origine d'une fonction affine ?

Correction :

On regarde où la droite coupe l'axe vertical. C'est aussi l'image de 0.

9. Un loueur de paddle facture 10 € de départ puis 2 € par heure. Combien coûtent 4 heures ?

Correction :

$$f(x) = 2x + 10, \text{ donc } f(4) = 8 + 10 = 18 \text{ €}.$$

10. On donne $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = 5x - 4$. Pour quelle valeur de x a-t-on $f(x) = g(x)$?

Correction :

$$3x + 4 = 5x - 4 \text{ donne } 8 = 2x, \text{ donc } x = 4. \text{ Les deux valent alors } 16.$$