

Les fonctions affines

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Deux nombres suffisent à tout dire : l'un donne la PENTE, l'autre le point de DÉPART. Et une fois qu'on les tient, on sait dessiner la droite, prévoir le sens de variation, et lire le signe — sans calculer autre chose.

MOTS CLÉS

Droite, pente, départ, croissante, décroissante

LE SECRET

Le signe du premier nombre décide de tout

OUTIL

Une droite : deux points suffisent à la tracer

À quoi ça sert : les fonctions affines

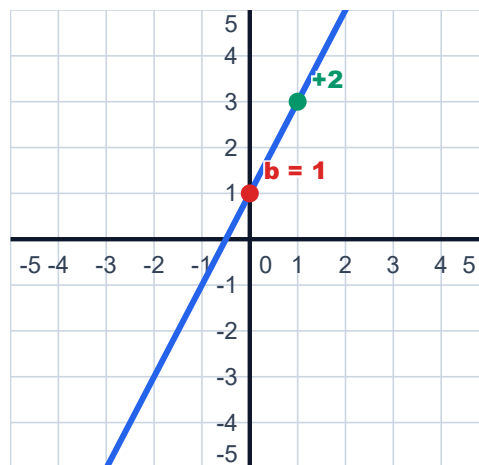
Une course en taxi coûte 4 € de prise en charge, puis 1,20 € par kilomètre. Le prix s'écrit $f(x) = 1,2x + 4$: le 4 est ce qu'on paie AVANT de rouler, le 1,2 ce que coûte chaque kilomètre. ★ C'est le modèle de tout ce qui a un coût fixe et un coût par unité — un abonnement, une location, une facture d'électricité. Et la question « à partir de combien de kilomètres l'autre taxi devient-il moins cher ? » est exactement une inéquation entre deux fonctions affines.

Un peu d'histoire : les fonctions affines

Le mot vient du latin affinis, « voisin, apparenté » : la fonction affine est la PARENTE de la fonction linéaire $x \mapsto ax$, dont elle ne diffère que par un décalage. Les Grecs savaient déjà tout de la droite, mais il a fallu attendre Descartes et ses coordonnées, en 1637, pour qu'une droite devienne une ÉQUATION — et donc qu'on puisse calculer sur elle au lieu de la tracer.

Définition : les fonctions affines

Une fonction **AFFINE** s'écrit $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres fixés. Le nombre a est le **COEFFICIENT DIRECTEUR** — de combien on monte quand x augmente de 1 — et b l'**ORDONNÉE À L'ORIGINE**, c'est-à-dire $f(0)$. ★ Sa représentation graphique est toujours une **DROITE**, et c'est ce qui rend ce chapitre visuel de bout en bout.

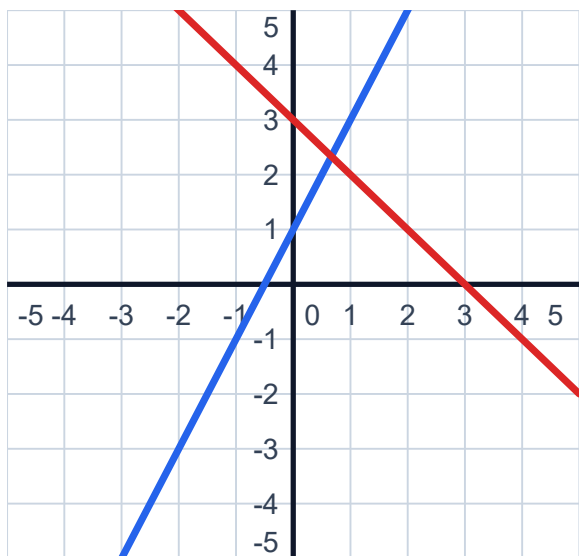


La droite de $f(x) = 2x + 1$. En rouge, l'ordonnée à l'origine : la droite coupe l'axe vertical en 1. En vert, un pas de 1 vers la droite fait monter de 2 — c'est le coefficient directeur.

Propriétés : les fonctions affines

La droite : a est la pente, b le départ

b se lit là où la droite coupe l'axe VERTICAL. a se lit en avançant de 1 vers la droite : on regarde de combien on monte — ou de combien on descend. ⚠ À ne pas confondre avec le point où la droite coupe l'axe horizontal, qui est la racine.



⊖ Le signe de a décide du sens

Si $a > 0$, la fonction est **CROISSANTE** : la droite monte.
Si $a < 0$, elle est **DÉCROISSANTE** : la droite descend. Si $a = 0$, la fonction est constante et la droite est horizontale. ★ Une fonction affine ne change jamais de sens en chemin — c'est ce qui la distingue de toutes les fonctions de référence sauf le cube.

$a > 0$
croissante ↗

$a < 0$
décroissante ↘

Le second nombre, b , ne change rien au sens : il fait seulement glisser la droite vers le haut ou vers le bas.

Deux points suffisent

Deux inconnues, donc deux informations. Connaissant $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on calcule a par le quotient des variations, puis on remplace dans une des deux égalités pour trouver b .

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$f(1) = 5 \quad f(3) = 11 \Rightarrow a = \frac{11 - 5}{3 - 1} = 3$$

$$5 = 3 \times 1 + b \Rightarrow b = 2$$

⊖ On divise par l'écart des ABSCISSES. Oublier ce dénominateur est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Le signe : une seule racine

Une fonction affine ne s'annule qu'une fois, en $x = -\frac{b}{a}$, et change de signe à cet endroit. L'ORDRE des deux signes suit le sens de variation : croissante, elle est négative puis positive ; décroissante, l'inverse.

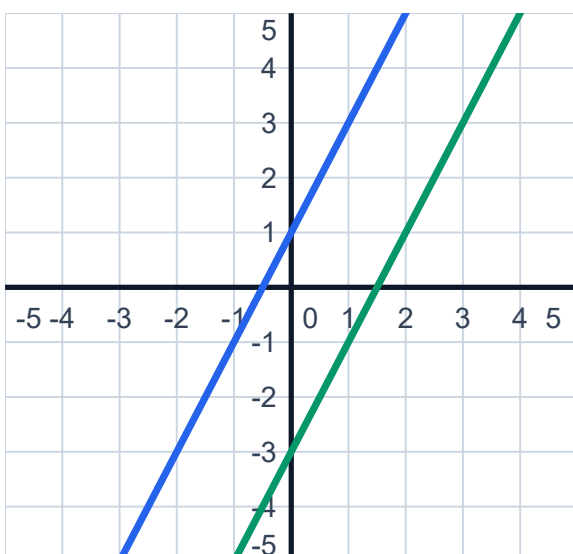
$$f(x) = 2x - 6 \Rightarrow x_0 = 3$$

$$x < 3 : f(x) < 0 \quad x > 3 : f(x) > 0$$

Ici $a = 2$ est positif, donc la fonction croît : elle est négative AVANT sa racine.

Deux droites parallèles ont le même a

Le coefficient directeur donne l'inclinaison. Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le MÊME a — l'ordonnée à l'origine n'y change rien. ★ Changer b fait GLISSER la droite ; changer a la fait PIVOTER.



Méthode : les fonctions affines

1. Je calcule une image, ou un antécédent

Une image : je remplace x par le nombre. Un antécédent : je résous $ax + b = k$, une équation du premier degré.

★ Les deux gestes vont dans des sens opposés.

$$\begin{aligned}f(x) &= 3x - 4 \\f(5) &= 3 \times 5 - 4 = 11 \\3x - 4 &= 8 \Rightarrow x = 4\end{aligned}$$

En bleu une image, en rouge un antécédent.

2. Je trouve a puis b , dans cet ordre

a se calcule seul, par le quotient des variations. b vient ensuite, en remplaçant dans une des égalités. 🚫 On ne peut pas faire l'inverse : b dépend de a .

$$a = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{puis} \quad b = f(x_1) - ax_1$$

Deux étapes, jamais dans l'autre sens.

3. Pour le signe, je cherche la racine

Je résous $ax + b = 0$, ce qui donne la racine. Puis le signe de a me dit de quel côté la fonction est négative — je n'ai rien d'autre à calculer.

$$a > 0$$

— puis +

$$a < 0$$

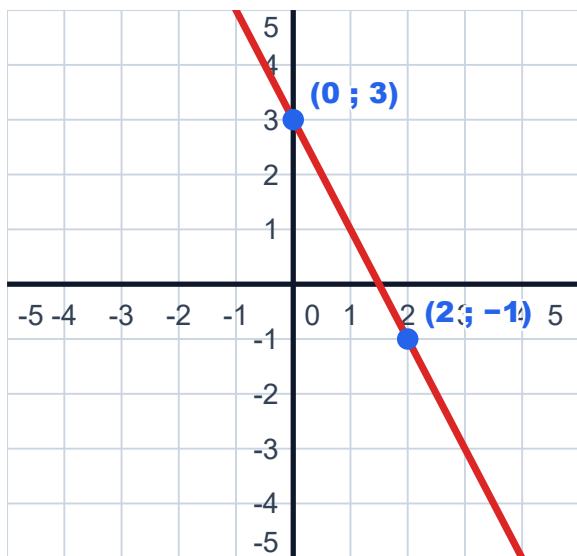
+ puis —

La racine dit OÙ ça change, le signe de a dit DANS QUEL ORDRE.

Selon ce que l'on cherche : les fonctions affines

Tracer une droite

Deux points suffisent, et les plus commodes sont $f(0) = b$ et un second point au choix. On place, on relie, on prolonge.



Résoudre une inéquation

$f(x) > 0$ se lit sur le tableau de signes, ou directement sur la droite : c'est l'intervalle où elle est AU-DESSUS de l'axe horizontal.

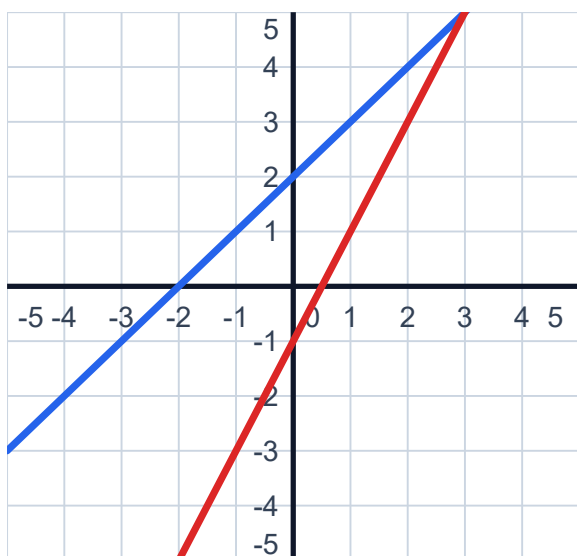
$$f(x) = -2x + 6$$

$$f(x) > 0 \iff x < 3$$

a est négatif, donc la fonction est positive AVANT sa racine.

Comparer deux offres

Deux fonctions affines, une inéquation : on cherche à partir de quand l'une passe sous l'autre. C'est le problème type, et il vient du monde réel.



Exemples corrigés : les fonctions affines

Une image et un antécédent

$$f(x) = -3x + 5.$$

Calculer $f(2)$, puis l'antécédent de 14.

$$\begin{aligned} f(2) &= -3 \times 2 + 5 = -1 \\ -3x + 5 &= 14 \Rightarrow x = -3 \end{aligned}$$

$f(2) = -3 \times 2 + 5 = -6 + 5 = -1$. Pour l'antécédent de 14, on résout $-3x + 5 = 14$, soit $-3x = 9$, donc $x = -3$. ⚠ Le second calcul est une ÉQUATION, pas un remplacement : c'est le geste inverse du premier.

Deux points, une expression

f est affine, $f(1) = 5$ et $f(4) = 14$.

Déterminer f .

$$\begin{aligned} a &= \frac{14 - 5}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3 \\ 5 &= 3 \times 1 + b \Rightarrow b = 2 \end{aligned}$$

Le coefficient directeur vaut $a = \frac{14 - 5}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$.
On remplace ensuite dans $f(1) = 5 : 3 \times 1 + b = 5$, donc $b = 2$. Ainsi $f(x) = 3x + 2$. ★
Vérification : $f(4) = 12 + 2 = 14$ ✓ — elle coûte deux secondes et attrape la plupart des erreurs.

Le signe d'une fonction croissante

$$f(x) = 4x - 12.$$

Sur quel intervalle f est-elle négative ?

$$\begin{aligned} 4x - 12 &= 0 \Rightarrow x = 3 \\ a &= 4 > 0 \Rightarrow \text{croissante} \end{aligned}$$

La racine est $x = 3$. Comme $a = 4$ est positif, la fonction est croissante : elle est donc négative AVANT 3, et positive après. Réponse : f est négative sur $] -\infty ; 3[$.

➖ Le même travail, mais a négatif

$$f(x) = -5x + 10.$$

Sur quel intervalle f est-elle négative ?

$$\begin{aligned} -5x + 10 &= 0 \Rightarrow x = 2 \\ a &= -5 < 0 \Rightarrow \\ &\text{décroissante} \end{aligned}$$

La racine est $x = 2$, comme précédemment un seul point. Mais $a = -5$ est NÉGATIF, donc la fonction décroît : elle est positive avant 2 et négative après. Réponse : f est négative sur $]2 ; +\infty[$. ➖ Même méthode, réponse opposée — c'est le signe de a , et lui seul, qui a tout changé.

Pièges à éviter : les fonctions affines

- ➖ Pour trouver a à partir de deux points, on DIVISE par l'écart des abscisses. $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, et non $y_2 - y_1$.
- ➖ Le signe de a décide de l'ordre des signes. Croissante : négative PUIS positive. Décroissante : l'inverse. Ne pas regarder a , c'est répondre au hasard.
- ➖ b est l'ordonnée à l'origine, PAS la racine. b est là où la droite coupe l'axe VERTICAL ; la racine est là où elle coupe l'axe horizontal.
- ➖ Une image se calcule en remplaçant ; un antécédent se calcule en RÉSOUVANT. Les deux gestes vont en sens opposés.
- ➖ Deux droites parallèles ont le même a , quel que soit leur b . Changer b fait glisser la droite, pas pivoter.
- ➖ Une fonction affine ne change jamais de sens en chemin. Si votre tableau de variations a un creux, ce n'est pas une fonction affine.

À retenir : les fonctions affines

$f(x) = ax + b$: a est la pente, b l'ordonnée à l'origine.

Sa représentation est une DROITE, et deux points suffisent à la tracer.

$a > 0$: croissante. $a < 0$: décroissante. $a = 0$: constante.

À partir de deux points : $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, puis $b = y_1 - a x_1$.

Une seule racine, en $x = -\frac{b}{a}$, et un seul changement de signe.

Parallèles $\iff$ même a .

Exercices corrigés : les fonctions affines

1. Dans $f(x) = -7x + 2$, quels sont le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine ?

Correction :

$a = -7$ et $b = 2$. Le coefficient directeur est le nombre DEVANT le x , signe compris.

2. La fonction $f(x) = 5$ est-elle affine ?

Correction :

Oui : c'est le cas $a = 0$ et $b = 5$. Sa droite est horizontale, et la fonction est constante.

3. Soit $f(x) = 4x - 3$. Calculer $f(-2)$.

Correction :

$$f(-2) = 4 \times (-2) - 3 = -8 - 3 = -11.$$

4. Soit $f(x) = 2x + 7$. Quel est l'antécédent de 1 ?

Correction :

$$\text{On résout } 2x + 7 = 1, \text{ soit } 2x = -6, \text{ donc } x = -3.$$

5. f est affine avec $f(2) = 7$ et $f(5) = 16$. Que vaut a ?

Correction :

$$a = \frac{16 - 7}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3. \quad \text{❌ Pas 9 : il faut diviser par l'écart des abscisses.}$$

6. Même fonction : déterminer son expression.

Correction :

Avec $a = 3$, on remplace dans $f(2) = 7 : 3 \times 2 + b = 7$, donc $b = 1$. Ainsi $f(x) = 3x + 1$.
Vérification : $f(5) = 15 + 1 = 16 \checkmark$.

7. f est affine, $f(0) = -4$ et $f(3) = 5$. Déterminer f .

Correction :

$$\text{Ici } b \text{ est donné directement : } b = f(0) = -4. \text{ Puis } a = \frac{5 - (-4)}{3 - 0} = 3. \text{ Donc } f(x) = 3x - 4.$$

8. En quelle valeur $f(x) = 6x - 18$ s'annule-t-elle ?

Correction :

$$\text{On résout } 6x - 18 = 0, \text{ soit } 6x = 18, \text{ donc } x = 3.$$

9. Sur quel intervalle $f(x) = -3x + 9$ est-elle positive ?

Correction :

Racine : $x = 3$. Comme $a = -3 < 0$, la fonction décroît : elle est positive AVANT sa racine, donc sur $] - \infty ; 3[$.

10. La droite de $f(x) = 5x - 1$ est-elle parallèle à celle de $g(x) = 5x + 8$?

Correction :

Oui : les deux ont le même coefficient directeur, 5. Leurs ordonnées à l'origine diffèrent, ce qui les fait seulement glisser l'une par rapport à l'autre.