

Les fonctions de référence

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Cinq fonctions à connaître par cœur, et trois questions à se poser sur chacune : qui a une image, dans quel sens elle varie, à quoi ressemble sa courbe. La première question surprend — la racine carrée refuse les négatifs, et l'inverse refuse zéro.

MOTS CLÉS

Carré, inverse, racine, cube, valeur absolue

LE SECRET

Une fonction n'est pas obligée de donner une image à tout le monde

OUTIL

Le sens de variation, pour comparer sans calculer

À quoi ça sert : les fonctions de référence

L'aire d'un carré de côté x vaut x^2 , son volume x^3 si c'est un cube — et inversement, connaître l'aire d'un terrain carré et vouloir son côté, c'est calculer $\sqrt{x}$. Quant à la fonction inverse, elle décrit tout ce qui se partage : 8 parts de gâteau pour n convives, c'est $\frac{8}{n}$ par personne. Plus il y a de monde, moins chacun en a — et jamais personne n'en a une part infinie, ce qui est exactement la raison pour laquelle 0 n'a pas d'image.

Un peu d'histoire : les fonctions de référence

Nicole Oresme, à Paris au XIV^e siècle, est le premier à dessiner une grandeur qui varie en fonction d'une autre — deux siècles et demi avant Descartes et les coordonnées. Mais le mot « fonction » n'apparaît qu'en 1673 sous la plume de Leibniz, et la notation $f(x)$ qu'en 1734 sous celle d'Euler. Ces cinq courbes-là ont donc été tracées bien avant qu'on ait un mot pour les nommer.

Définition : les fonctions de référence

On appelle fonctions de référence cinq fonctions dont on connaît par cœur le domaine, les variations et la courbe : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto |x|$. Le **DOMAINE DE DÉFINITION** est l'ensemble des nombres qui ont une image — et il n'est pas toujours $\mathbb{R}$.

Les cinq, d'un coup d'œil

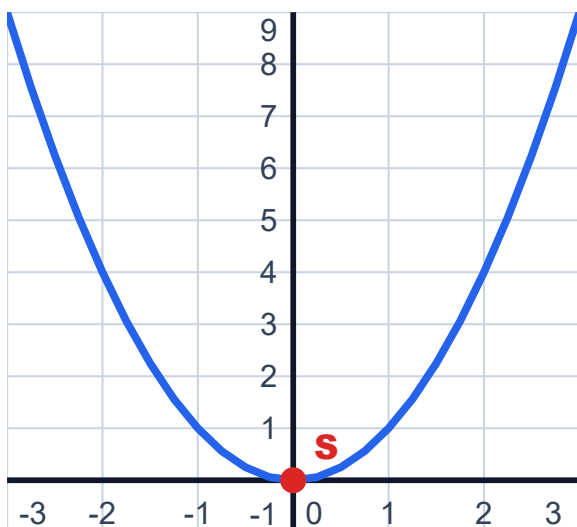
Données	x^2	$1/x$	$\sqrt{x}$	x^3	$ x $
définie sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ sauf 0	$x \geq 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
courbe	parabole	hyperbole	demi- branche	en S	en V
variations	↘ puis ↗	↘ des 2 côtés	↗	↗	↘ puis ↗

Deux d'entre elles seulement ont un domaine restreint : $\sqrt{x}$ refuse les négatifs, $\frac{1}{x}$ refuse zéro. Et deux d'entre elles changent de sens en chemin — celles dont la courbe a un creux.

Propriétés : les fonctions de référence

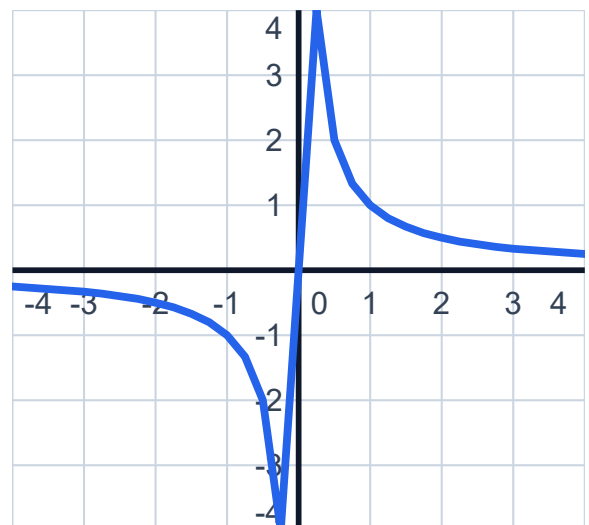
La fonction carré : elle inverse l'ordre à gauche

Définie sur $\mathbb{R}$, elle est DÉCROISSANTE sur $] -\infty ; 0]$ puis CROISSANTE sur $[0 ; +\infty[$. 🚫 Donc $-5 < -2$ mais $25 > 4$: élever au carré n'a inversé l'ordre que parce qu'on était du côté négatif.



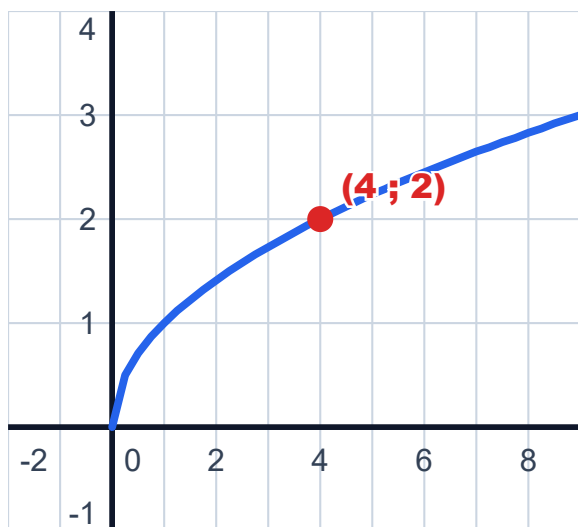
La fonction inverse : zéro est exclu

Définie sur $\mathbb{R}^*$ — tous les réels SAUF zéro, car $\frac{1}{0}$ n'a pas de sens. Elle est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ ET sur $]0 ; +\infty[$, séparément : sa courbe est en deux morceaux qui ne se rejoignent jamais.



★ La racine carrée : -1 n'a pas d'image

Définie seulement sur $[0 ; +\infty[$. L'image de 4 est 2, celle de 9 est 3 — mais -1 n'en a AUCUNE : il n'existe pas de nombre dont le carré vaut -1 . Sa courbe s'arrête net à l'origine et ne repart jamais vers la gauche.



La fonction cube : elle ne trahit jamais l'ordre

Définie sur $\mathbb{R}$ et CROISSANTE partout, négatifs compris : si $a < b$ alors $a^3 < b^3$, toujours. ★ C'est ce qui la distingue du carré, avec lequel on la confond — $(-3)^3 = -27$ garde son signe.



Méthode : les fonctions de référence

1. 1. Le nombre a-t-il une image ?

Avant tout calcul, on regarde le domaine. Un négatif sous une racine, un zéro au dénominateur : la réponse est « pas d'image », et c'est une réponse complète.

Données	$\sqrt{(-1)}$	$1/0$	$(-1)^3$
existe ?	non	non	oui : -1

2. 2. De quel côté de zéro suis-je ?

Pour le carré, l'inverse et la valeur absolue, le sens de variation CHANGE selon le côté. Situer les nombres par rapport à zéro décide de tout.

Données	sur les négatifs	sur les positifs
le carré	décroissant	croissant

3. 3. Je conclus sans calculer

Une fonction croissante conserve l'ordre, une décroissante l'inverse. C'est ce qui permet de comparer $2,1^2$ et $2,3^2$ sans sortir la calculatrice.

Données	$2,1 < 2,3$	conclusion
positifs	croissant ici	$2,1^2 < 2,3^2$

Selon ce que l'on cherche : les fonctions de référence

Comparer sans calculer

C'est l'usage principal au contrôle. On situe les deux nombres, on lit le sens de variation, on conclut. ➖ Sur les négatifs, le carré inverse : $-5 < -2$ donne $25 > 4$.

Le même calcul, deux conclusions

Données	$a = -5, b = -2$	$a = 2, b = 5$
a^2 et b^2	$a^2 > b^2$	$a^2 < b^2$

Résoudre $f(x) = k$

$x^2 = k$ a DEUX solutions si $k > 0$, une seule si $k = 0$, aucune si $k < 0$. Et $\sqrt{x} = k$ n'a aucune solution dès que k est négatif, puisqu'une racine n'est jamais négative.

Le signe de k décide

Données	$x^2 = 9$	$x^2 = 0$	$x^2 = -4$
solutions	2 : -3 et 3	1 : zéro	aucune

Encadrer

Si $2 \leq x \leq 3$ alors $4 \leq x^2 \leq 9$. ➖ Mais si $-3 \leq x \leq -2$, les bornes S'ÉCHANGENT : $4 \leq x^2 \leq 9$ aussi, en partant de l'autre bout.

Même encadrement, chemin inverse

Données	$[2 ; 3]$	$[-3 ; -2]$
x^2 dans	$[4 ; 9]$	$[4 ; 9]$

Exemples corrigés : les fonctions de référence

★ Une image qui n'existe pas

La fonction racine carrée.

Quelles sont les images de 4 et de -1 ?

Données	4	-1
image	2	aucune

L'image de 4 est $\sqrt{4} = 2$, car $2^2 = 4$. Mais -1 n'a PAS d'image : $\sqrt{-1}$ devrait être un nombre dont le carré vaut -1 , et aucun carré n'est négatif. ★ Une fonction n'est pas obligée de donner une image à tout le monde — c'est même ce que veut dire « domaine de définition ».

Le carré sur les négatifs

$a = -5$ et $b = -2$, donc $a < b$.

Comparer a^2 et b^2 .

Données	$a = -5$	$b = -2$
le carré	25	4

$a^2 = 25$ et $b^2 = 4$, donc $a^2 > b^2$. L'ordre s'est INVERSÉ, parce que la fonction carré est décroissante sur les négatifs. ➖ Écrire « $a < b$ donc $a^2 < b^2$ » est l'erreur la plus fréquente du chapitre : cette implication n'est vraie que sur les positifs.

Comparer sans calculatrice

$\sqrt{17}$ et $\sqrt{15}$.

Lequel est le plus grand ?

Données	$15 < 17$	la racine
donc	—	$\sqrt{15} < \sqrt{17}$

La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$: elle conserve l'ordre. Comme $15 < 17$, on a $\sqrt{15} < \sqrt{17}$. ★ Aucune valeur approchée n'était nécessaire — et une valeur approchée n'aurait rien DÉMONTRÉ.

Une équation sans solution

$\sqrt{x} = -3$.

Résoudre.

Données	$\sqrt{x}$	-3
signe	toujours ≥ 0	négatif

Aucune solution. Une racine carrée est toujours positive ou nulle, elle ne peut donc jamais valoir -3 . ➖ Le réflexe d'élever au carré donnerait $x = 9$ — mais $\sqrt{9} = 3$, et non -3 : la vérification élimine cette fausse solution. On regarde le signe AVANT de calculer.

Pièges à éviter : les fonctions de référence

- « $a < b$ donc $a^2 < b^2$ » est FAUX. Sur les négatifs, l'ordre s'inverse : $-5 < -2$ mais $25 > 4$.
- $\sqrt{x}$ n'existe que pour $x \geq 0$, et $\frac{1}{x}$ que pour $x \neq 0$. « Pas d'image » est une réponse complète, pas un aveu d'échec.
- Une racine carrée n'est JAMAIS négative. $\sqrt{x} = -3$ n'a pas de solution, et élever au carré sans regarder le signe fabrique une fausse réponse.
- $x^2 = 9$ a DEUX solutions, -3 et 3 . N'en donner qu'une est l'oubli le plus courant.
- Le cube n'est pas le carré. $(-3)^3 = -27$ garde son signe, et la fonction cube est croissante partout — elle ne trahit jamais l'ordre.
- La fonction inverse est décroissante sur chacun de ses deux morceaux, mais pas d'un morceau à l'autre : $-2 < 3$ et pourtant $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$. Il faut franchir zéro pour le voir.

À retenir : les fonctions de référence

Domaine : x^2 , x^3 et $|x|$ sur $\mathbb{R}$; $\sqrt{x}$ sur $[0 ; +\infty[$; $\frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Le carré et la valeur absolue décroissent puis croissent — le creux est en 0.

La racine et le cube sont croissantes : elles conservent l'ordre.

L'inverse décroît sur chacun de ses deux morceaux, séparément.

Une fonction croissante conserve l'ordre, une décroissante l'inverse : c'est ainsi qu'on compare sans calculer.

$x^2 = k$: deux solutions si $k > 0$, une si $k = 0$, aucune si $k < 0$.

Exercices corrigés : les fonctions de référence

1. Combien vaut l'image de -7 par la fonction carré ?

Correction :

$(-7)^2 = 49$. Un carré est toujours positif, le signe disparaît.

2. Combien l'équation $x^2 = 36$ a-t-elle de solutions ?

Correction :

Deux : $x = 6$ et $x = -6$, car deux nombres opposés ont le même carré. Ne donner que 6 est un demi-résultat.

3. Quelle est l'image de 0 par la fonction inverse ?

Correction :

Elle n'existe pas. $\frac{1}{0}$ n'a pas de sens : aucun nombre multiplié par 0 ne donne 1. C'est la seule valeur exclue.

4. Comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{8}$.

Correction :

$3 < 8$ et la fonction inverse est décroissante sur les positifs, donc $\frac{1}{3} > \frac{1}{8}$. L'ordre s'inverse.

5. Quelle est l'image de -4 par la fonction racine carrée ?

Correction :

Elle n'existe pas : la racine carrée n'est définie que sur $[0 ; +\infty[$. Aucun nombre n'a -4 pour carré.

6. Résoudre $\sqrt{x} = 7$.

Correction :

7 est positif, on peut élever au carré : $x = 49$. Vérification : $\sqrt{49} = 7$.

7. Comparer $(-4)^3$ et $(-2)^3$.

Correction :

-64 et -8 , donc $(-4)^3 < (-2)^3$. La fonction cube est croissante partout : l'ordre de $-4 < -2$ est conservé, contrairement au carré.

8. Comparer $2,9^2$ et $3,1^2$ sans calculatrice.

Correction :

Les deux nombres sont positifs et $2,9 < 3,1$; la fonction carré est croissante sur les positifs, donc $2,9^2 < 3,1^2$.

9. On sait que $-3 \leq x \leq -1$. Encadrer x^2 .

Correction :

L'intervalle est entièrement négatif, où le carré DÉCROÎT : les bornes s'échangent. $(-1)^2 = 1$ devient le minimum et $(-3)^2 = 9$ le maximum, donc $1 \leq x^2 \leq 9$.

10. Résoudre $x^2 = -16$.

Correction :

Aucune solution : un carré n'est jamais négatif. Inutile de chercher une racine — le signe de -16 suffit à conclure.