

Fonctions : image, antécédent, courbe

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Une fonction est une machine à un seul sens : à chaque nombre de départ elle associe UNE image, et une seule. Mais rien ne l'empêche de donner la même image à plusieurs nombres — c'est toute la différence entre une image et un antécédent.

MOTS CLÉS

Image, antécédent, courbe, domaine de définition

LE SECRET

Une image est unique, un antécédent non

OUTIL

La courbe représentative

À quoi ça sert : Fonctions : image, antécédent, courbe

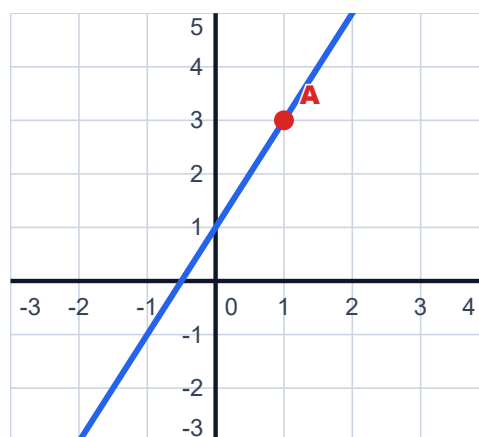
Le prix d'un billet d'avion Réunion-Métropole dépend de la date : à chaque jour de l'année correspond UN prix, c'est une fonction. Mais un même prix peut se retrouver à plusieurs dates — plusieurs antécédents pour une seule image. Chercher « quand le billet coûte-t-il 700 € ? », c'est chercher des antécédents.

Un peu d'histoire : Fonctions : image, antécédent, courbe

Le mot « fonction » vient de Leibniz, à la fin du XVII^e siècle, pour désigner une quantité qui dépend d'une courbe. La notation $f(x)$, elle, est d'Euler, vers 1734 : elle a mis un siècle à s'imposer, et c'est elle qui a rendu l'idée manipulable.

Définition : Fonctions : image, antécédent, courbe

Une fonction f associe à chaque nombre x de son domaine un seul nombre, noté $f(x)$ et appelé **IMAGE** de x . Inversement, si $f(x) = y$, on dit que x est un **ANTÉCÉDENT** de y . La courbe représentative de f rassemble tous les points de coordonnées $(x ; f(x))$.

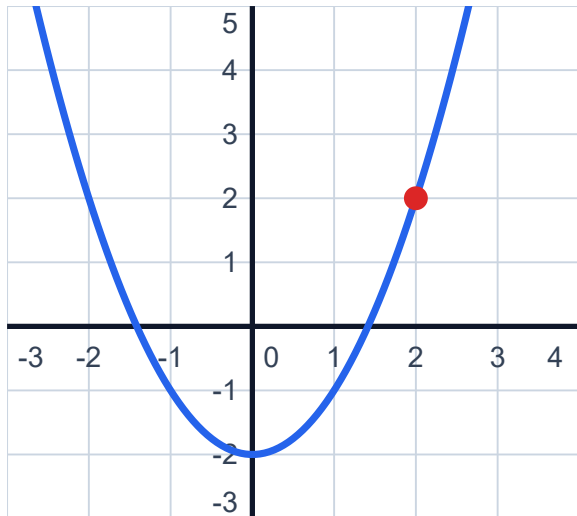


Le point A a pour coordonnées $(1 ; 3)$:
l'image de 1 est 3, et 1 est un antécédent de 3.
L'abscisse d'abord, toujours.

Propriétés : Fonctions : image, antécédent, courbe

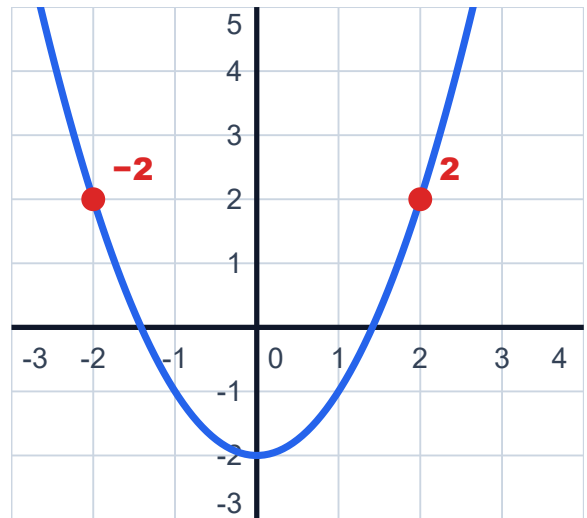
Une image est UNIQUE

Pour un x donné, il n'y a qu'une image : la verticale d'abscisse 2 ne rencontre la courbe qu'en UN point. Une verticale ne la coupe jamais deux fois.



Un antécédent ne l'est pas

Une même image peut venir de plusieurs nombres. Une horizontale, elle, peut couper la courbe plusieurs fois.



Le domaine de définition

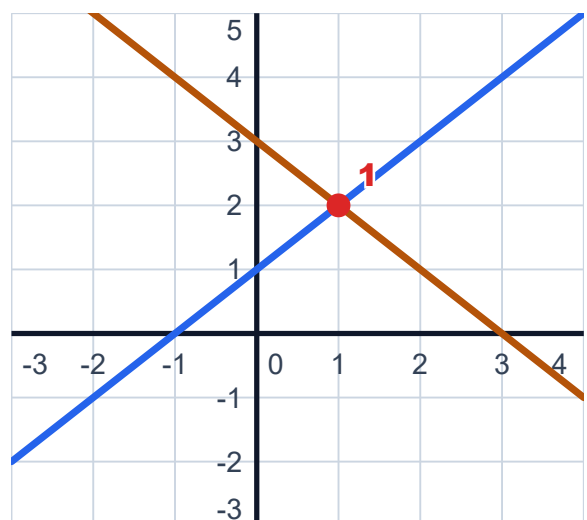
C'est l'ensemble des x qui ONT une image. Deux interdits en seconde : diviser par zéro, et prendre la racine d'un négatif.

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

Comparer DEUX courbes

$f(x) = g(x)$ se lit aux points d'intersection. $f(x) > g(x)$ se lit là où C_f passe au-dessus de C_g — l'axe n'intervient plus.



Méthode : Fonctions : image, antécédent, courbe

1. Calculer une image

Je remplace x par le nombre, partout, et je calcule.

$f(x) = 2x + 1$ donne $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$: le point marqué a pour ordonnée 7.

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3
f(x)	1	3	5	7

2. Chercher un antécédent

Je pose l'ÉQUATION $f(x) = y$ et je la résous. Il peut y avoir zéro, une, ou plusieurs solutions — ici, 2 apparaît DEUX fois dans la ligne du bas.

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	2	-1	-2	-1	2

3. Vérifier le domaine

Avant tout calcul, je regarde si le nombre A une image : pas de division par zéro, pas de racine de négatif. La lecture graphique, elle, est détaillée plus bas.

Tableau de valeurs

x	-2	-1	1	2
f(x)	-0.5	-1	1	0.5

Selon ce que l'on cherche : Fonctions : image, antécédent,

courbe

Le tableau de valeurs

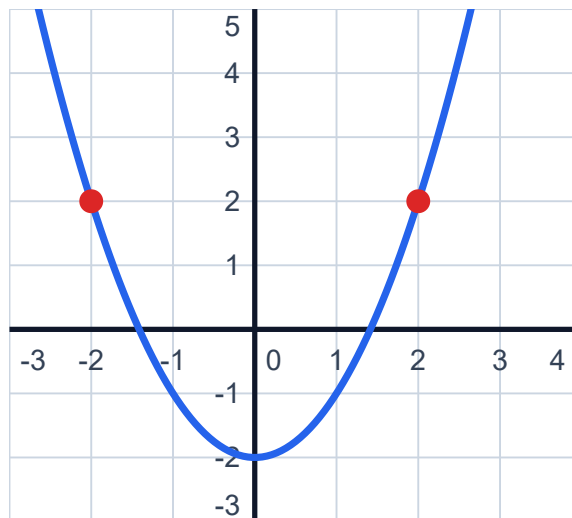
Chaque colonne est UN point : l'abscisse en haut, l'image en bas. Il ne dit rien de ce qui se passe entre deux colonnes.

Tableau de valeurs

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-1	1	3	5	7

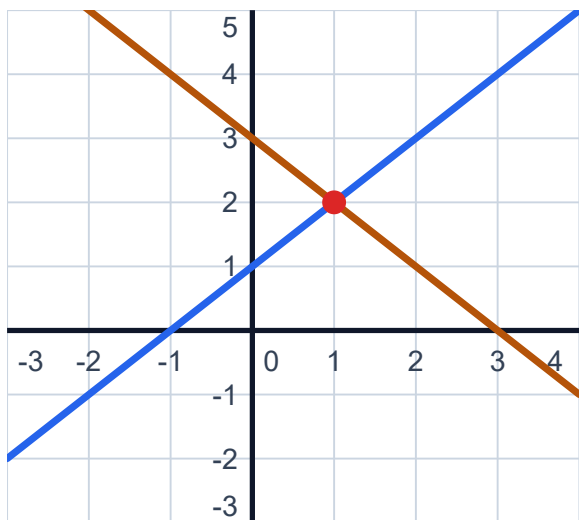
Résoudre $f(x) = k$

Je trace l'horizontale d'ordonnée k et je lis les abscisses des points d'intersection.



Comparer deux courbes

$f(x) > g(x)$: je cherche où C_f domine C_g . Les deux peuvent être négatives, cela ne change rien.



Exemples corrigés : Fonctions : image, antécédent, courbe

Calculer une image

$$f(x) = x^2 - 3x.$$

Calculer $f(4)$.

Tableau de valeurs

x	1	2	3	4
f(x)	-2	-2	0	4

On remplace x par 4 PARTOUT : $f(4) = 4^2 - 3 \times 4 = 16 - 12 = 4$. L'image de 4 est 4 — une coïncidence de nombres, pas une règle.

Chercher les antécédents

$$g(x) = x^2 - 2.$$

Quels sont les antécédents de 2 ?

Tableau de valeurs

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	2	-1	-2	-1	2

On résout $x^2 - 2 = 2$, donc $x^2 = 4$: $x = 2$ ou $x = -2$. DEUX antécédents pour une seule image — et le tableau le montre : la valeur 2 apparaît aux deux extrémités de la ligne du bas.

Résoudre graphiquement

La courbe de h est une droite passant par $(0 ; 1)$ et $(2 ; 5)$.

Résoudre $h(x) = 3$.

Tableau de valeurs

x	0	1	2	3
f(x)	1	3	5	7

On cherche où la valeur 3 apparaît dans la ligne du bas : sous $x = 1$. Graphiquement, on tracerait l'horizontale d'ordonnée 3, qui coupe la droite en un seul point d'abscisse 1. La solution est $x = 1$ — on lit une ABSCISSE, jamais une ordonnée.

Comparer deux fonctions

$$f(x) = x + 1 \text{ et } g(x) = -x + 3.$$

Résoudre graphiquement $f(x) > g(x)$.

Données	-1	0	1	2	3
f(x)	0	1	2	3	4
g(x)	4	3	2	1	0

Le tableau montre le basculement : avant $x = 1$, la ligne de g domine ; après, c'est celle de f . En $x = 1$ les deux valent 2 — les courbes s'y croisent. Les solutions sont $]1 ; +\infty[$, borne exclue puisqu'en 1 les deux fonctions sont ÉGALES.

Pièges à éviter : Fonctions : image, antécédent, courbe

- ⊖ Une IMAGE est unique, un ANTÉCÉDENT non. Chercher « l'antécédent » au singulier fait rater la moitié des réponses.
- ⊖ Un point se note $(x ; f(x))$: l'ABSCISSE d'abord. $(3 ; 5)$ et $(5 ; 3)$ ne sont pas le même point.
- ⊖ Résoudre $f(x) = k$ graphiquement, c'est lire des ABSCISSES. Répondre k revient à recopier la question.
- ⊖ Comparer deux courbes, ce n'est PAS les comparer à l'axe. Les deux peuvent être négatives et $f(x) > g(x)$ vraie quand même.
- ⊖ Un tableau de valeurs ne donne que ses colonnes. Entre deux d'entre elles, c'est la formule qui décide, pas la règle qu'on pose sur le dessin.

À retenir : Fonctions : image, antécédent, courbe

$f(x)$ est l'image de x ; x est un antécédent de $f(x)$.

Une verticale coupe la courbe AU PLUS une fois — c'est ce qui fait d'elle une fonction.

Une horizontale peut la couper plusieurs fois : autant d'antécédents.

Le domaine, c'est l'ensemble des x qui ont une image : ni division par zéro, ni racine de négatif.

$f(x) = k$: intersection avec l'horizontale d'ordonnée k , et on lit les abscisses.

$f(x) > g(x)$: là où C_f est au-dessus de C_g .

Exercices corrigés : Fonctions : image, antécédent, courbe

1. Soit $f(x) = 3x - 5$. Calculer $f(4)$.

Correction :

On remplace x par 4 : $f(4) = 3 \times 4 - 5 = 12 - 5 = 7$.

2. Soit $g(x) = x^2 + 2x$. Calculer $g(-3)$.

Correction :

$g(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) = 9 - 6 = 3$. ⚠ $(-3)^2$ vaut 9 et non -9 : le carré rend le résultat positif.

3. Soit $f(x) = 2x + 7$. Quel est l'antécédent de 1 ?

Correction :

On pose l'ÉQUATION $2x + 7 = 1$, donc $2x = -6$ et $x = -3$. L'antécédent de 1 est -3 .

4. Soit $g(x) = x^2$. Quels sont les antécédents de 9 ?

Correction :

On résout $x^2 = 9$: $x = 3$ ou $x = -3$. Il y en a DEUX — chercher « l'antécédent » au singulier en aurait fait manquer un.

5. Quel est le domaine de définition de $f(x) = \frac{5}{x-2}$?

Correction :

On écarte ce qui annule le dénominateur : $x - 2 = 0$ donne $x = 2$. Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

6. Un tableau de valeurs donne $f(0) = 1$ et $f(1) = 4$. Peut-on en déduire $f(0,5)$?

Correction :

Non. Le tableau ne décrit que les colonnes qu'il contient. Entre 0 et 1, c'est la formule de f qui décide, et elle n'est pas donnée.

7. La courbe de f coupe l'horizontale d'ordonnée 2 aux points d'abscisses -1 et 3 . Résoudre $f(x) = 2$.

Correction :

Les solutions sont les ABSCISSES de ces points : $x = -1$ et $x = 3$. On ne répond pas 2, qui est l'ordonnée donnée dans l'énoncé.

8. La courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses sur $] -\infty ; 1[$. Résoudre $f(x) > 0$.

Correction :

$f(x) > 0$ se lit « la courbe est au-dessus de l'axe ». Les solutions sont $] -\infty ; 1[$.

9. Deux courbes C_f et C_g se coupent en $x = -2$ et $x = 4$. Que peut-on dire de $f(-2)$ et $g(-2)$?

Correction :

En un point d'intersection, les deux fonctions ont la même valeur : $f(-2) = g(-2)$. C'est ce que signifie « se couper ».

10. Sur $]0 ; 3[$, C_f est en dessous de C_g , et les deux sont sous l'axe des abscisses. $f(x) > g(x)$ est-elle vraie sur cet intervalle ?

Correction :

Non : C_f est EN DESSOUS de C_g , donc $f(x) < g(x)$. Le fait que les deux soient négatives ne change rien — on compare les courbes entre elles, pas à l'axe.