

Fonctions : image et antécédent

cours et exercices corrigés de maths 3e

Un loueur de vélo affiche ses tarifs à l'heure. Vous entrez un nombre d'heures, il en sort un prix. C'est exactement ce qu'est une fonction : une machine à un seul bouton, qui transforme un nombre en un autre. Tout le vocabulaire de ce chapitre — image, antécédent, $f(x)$ — sert à dire proprement dans quel SENS on traverse la machine.

L'ÉCRITURE

$f(x)$, qui se lit « f de x » —
jamais « f fois x »

LES DEUX MOTS

x est l'antécédent, $f(x)$ est
son image

LE PIÈGE

Un nombre a **UNE SEULE**
image, mais peut avoir
PLUSIEURS antécédents

À quoi ça sert : Fonctions : image et antécédent

Presque tout tarif est une fonction. Un loueur de jet-ski à Saint-Gilles annonce un prix par heure : le nombre d'heures entre, le prix sort. La hauteur d'un ballon lancé sur la plage en est une aussi — la seconde entre, les mètres sortent — et c'est justement celle-là qui montre qu'un même résultat peut venir de deux instants différents. Comprendre les fonctions, c'est pouvoir répondre à deux questions opposées : « combien cela coûtera-t-il ? », et « avec ce budget, jusqu'où puis-je aller ? ». La seconde est presque toujours la vraie question.

Un peu d'histoire : Fonctions : image et antécédent

Le mot « fonction » est employé par Leibniz vers 1673, pour désigner des longueurs qui dépendent d'un point sur une courbe. L'écriture $f(x)$, elle, est due à Leonhard Euler en 1734 — et c'est cette notation, plus que l'idée, qui a fait basculer les mathématiques : en donnant un NOM à la machine, séparé de ses résultats, elle a permis de parler de la fonction elle-même, de la comparer à une autre, de l'étudier. Avant Euler, on décrivait des calculs ; après lui, on manipule des objets.

Définition : Fonctions : image et antécédent

Une fonction f est un procédé qui, à un nombre, en associe UN SEUL autre. Si l'on part de x , le nombre obtenu se note $f(x)$ et s'appelle l'image de x par f . En sens inverse, x est appelé un antécédent de $f(x)$. L'écriture $f : x \mapsto 2x + 3$ se lit « la fonction f qui à x associe $2x + 3$ » : elle décrit la machine, tandis que $f(4) = 11$ décrit un seul passage dedans.

x	1	2	3	4
f(x)	6	12	18	24

Location de vélo : x heures, et le prix en euros

La première ligne porte les nombres de départ, la seconde leurs images. Ici $f(3) = 18$: trois heures de vélo coûtent 18 €.

Propriétés : Fonctions : image et antécédent

Trois mots, et un seul sens de lecture

L'antécédent est ce qui ENTRE, l'image ce qui SORT. La notation $f(x)$ désigne toujours la sortie : dans $f(3) = 7$, le nombre 3 est l'antécédent et 7 est l'image. Dire « l'image de 7 est 3 » est donc faux — c'est la phrase inverse.

on écrit	ce que c'est
x	l'antécédent : ce qui entre
$f(x)$	l'image : ce qui sort
$f(3) = 7$	3 entre, 7 sort

les parenthèses ne multiplient pas

Le nom dépend de la place, pas de la valeur : un même nombre peut être image ici et antécédent ailleurs.

Calculer une image : on remplace

Pour obtenir $f(4)$ quand $f(x) = 2x + 3$, on remplace chaque x par 4, puis on calcule : $2 \times 4 + 3 = 11$. Donc $f(4) = 11$. Le calcul se fait dans l'ordre des priorités — la multiplication avant l'addition.

x	1	2	3	4
f(x)	6	12	18	24

L'image du nombre surligné

On part du haut, on descend : l'image de 3 est 18.

L'antécédent : le chemin inverse

Chercher un antécédent de 12, c'est chercher quel nombre a 12 pour image — donc résoudre l'équation $f(x) = 12$. Avec $f(x) = 2x + 3$, cela donne $2x + 3 = 12$, puis $x = 4,5$. On ne remplace plus : on résout.

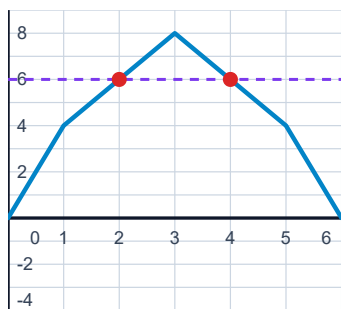
x	1	2	3	?
f(x)	6	12	18	24

Quel nombre a 24 pour image ?

On part du bas, on remonte : l'antécédent de 24 est 4.

Une seule image, mais plusieurs antécédents

C'est la dissymétrie du chapitre, et elle n'est pas un détail : un nombre de départ ne peut avoir qu'UNE image — sinon la machine ne serait pas fiable. En revanche, DEUX départs différents peuvent parfaitement donner le même résultat. Sur une droite non horizontale, cela n'arrive jamais ; sur une courbe quelconque, tout le temps.



Le ballon était à 6 mètres à 2 secondes ET à 4 secondes : 6 a deux antécédents.

Le tableau de valeurs : deux lignes, deux rôles

La première ligne donne les nombres de départ, la seconde leurs images. Lire une image, c'est descendre d'une case ; chercher un antécédent, c'est remonter. Un tableau ne montre que quelques valeurs choisies : il ne dit rien de ce qui se passe entre deux colonnes.

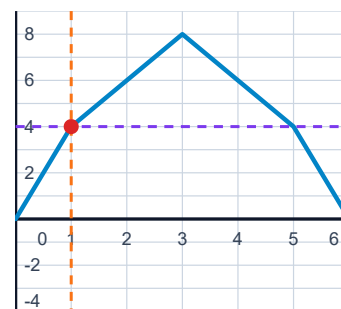
on cherche	le geste
une image	descendre depuis la ligne x
un antécédent	remonter depuis la ligne $f(x)$

deux lignes, deux sens

Le tableau est une photographie de la fonction, pas la fonction entière.

Lire une image sur un graphique

On repère x sur l'axe horizontal, on monte jusqu'à la courbe, puis on lit à gauche sur l'axe vertical : c'est l'image. Pour un antécédent, on fait le trajet à l'envers — on part de l'axe vertical et on redescend sur l'axe horizontal.



À 1 seconde, on monte jusqu'à la courbe puis on lit à gauche : 4 mètres.

Reconnaître une fonction linéaire ou affine

Une fonction linéaire s'écrit

$f(x) = ax$: sa courbe est une

droite qui passe par l'origine, car

$f(0) = 0$. Une fonction affine

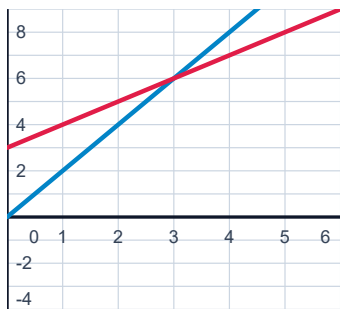
s'écrit $f(x) = ax + b$: sa droite

coupe l'axe vertical à la hauteur b .

Toute fonction linéaire est donc

affine — c'est le cas où b vaut 0 —

mais l'inverse est faux.



La bleue part de zéro : elle est linéaire. La rose part de 3 : elle est affine seulement.

La formule : Fonctions : image et antécédent

L'ÉCRITURE D'UNE FONCTION, ET CELLE D'UN SEUL DE SES RÉSULTATS

$$f : x \mapsto 2x + 3 \quad \text{et} \quad f(4) = 11$$

À gauche, la machine tout entière : la flèche $\mapsto$ se lit « a pour image ». À droite, un seul passage dedans. Les deux écritures parlent de la même fonction, mais la première la décrit et la seconde la fait travailler.

on écrit	on lit
$f : x \mapsto 2x + 3$	f qui à x associe $2x + 3$
$f(x) = 2x + 3$	l'image de x vaut $2x + 3$
$f(4) = 11$	l'image de 4 est 11

trois écritures, une seule fonction

Trois écritures, une seule fonction.

Méthode : Fonctions : image et antécédent

1. La première question : image ou antécédent ?

Avant tout calcul, regarder CE QUI EST DONNÉ. Si l'énoncé fournit le nombre de départ, on cherche une image : on remplace. S'il fournit le résultat, on cherche un antécédent : on résout une équation. Presque toutes les erreurs du chapitre viennent d'avoir tranché trop vite.

on donne	on cherche	on
x	l'image	rechercher
$f(x)$	l'antécédent	trouver

la donnée décide du geste

Le mot « calcule » ne suffit pas : c'est la donnée qui indique le sens.

2. Calculer une image sans se tromper de priorité

On écrit d'abord la substitution en entier, AVEC les parenthèses si le nombre est négatif : pour $f(x) = -2x + 5$ et $x = 3$, on écrit $-2 \times 3 + 5$, ce qui donne $-6 + 5 = -1$. Sauter l'étape écrite est la source d'erreur la plus fréquente quand un signe moins traîne.

3. Vérifier un antécédent

Une fois x trouvé, on le remet dans la fonction : elle doit redonner le nombre de départ. Si l'on cherchait l'antécédent de 12 et que la vérification donne 12, c'est juste. Cette vérification coûte une ligne et attrape toutes les erreurs de résolution.

4. Lire un graphique : deux traits au crayon

On trace le trait vertical depuis l'axe horizontal jusqu'à la courbe, puis le trait horizontal jusqu'à l'axe vertical. Les deux traits laissés sur la copie montrent le raisonnement et évitent de lire une case de travers. Pour un antécédent, on commence par le trait horizontal.

Selon ce que l'on cherche : Fonctions : image et antécédent

On me donne le nombre de départ

C'est une image. On remplace x par sa valeur dans l'expression, et on calcule. Exemple : combien coûtent 4 heures de vélo à 6 € l'heure ?

On me donne le résultat

C'est un antécédent. On écrit l'équation $f(x) = \text{résultat}$, puis on la résout. Exemple : avec 30 €, combien d'heures de vélo puis-je louer ?

On me donne un tableau

On cherche la colonne. Descendre depuis la ligne du haut donne une image ; remonter depuis la ligne du bas donne un antécédent.

On me donne une courbe

On lit. Vertical puis horizontal pour une image ; horizontal puis vertical pour un antécédent — et il peut y en avoir plusieurs.

On me demande de quel type est la fonction

On regarde l'expression. ax seul : linéaire. $ax + b$ avec b non nul : affine sans être linéaire. Ni l'un ni l'autre si x apparaît autrement.

Exemples corrigés : Fonctions : image et antécédent

Le food truck de Saint-Pierre

Le prix de x tacos est donné par $f(x) = 3x + 2$, en euros.

Combien coûtent 5 tacos ?

x	1	2	3	4
$f(x)$	5	8	11	14

Le prix pour x tacos, en euros

Chaque taco ajoute 3 € : les images montent de 3 en 3.

On donne le nombre de départ, donc on cherche une image : on remplace. $f(5) = 3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17$. Cinq tacos coûtent 17 €. Contrôle rapide : $f(0) = 2$, ce qui correspond au montant fixe de la commande — c'est cohérent.

L'excursion payée d'avance

Une excursion coûte $f(x) = 12x + 15$ euros pour x personnes.

Une famille a payé 87 €. Combien de personnes étaient-elles ?

x	4	5	?	7
$f(x)$	63	75	87	99

Quel nombre de personnes coûte 87 euros ?

On remonte depuis 87 : la colonne cherchée est celle de 6 personnes.

Ici on donne le RÉSULTAT : on cherche donc un antécédent, et on résout. $12x + 15 = 87$, donc $12x = 72$, donc $x = 6$. Elles étaient 6. Vérification obligatoire : $12 \times 6 + 15 = 72 + 15 = 87$. C'est bien le montant payé.

Deux loueurs de jet-ski

Le premier facture $f(x) = 20x$ euros pour x heures ; le second $g(x) = 15x + 10$.

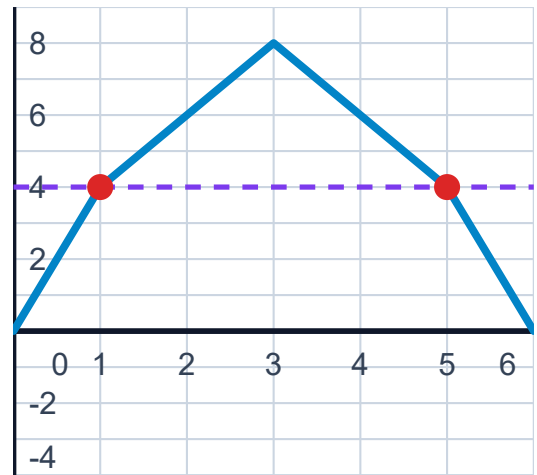
Pour 2 heures, lequel est le moins cher ? Et pour 4 heures ?

On calcule les deux images à chaque fois. Pour 2 heures : $f(2) = 40$ et $g(2) = 15 \times 2 + 10 = 40$. Ils coûtent exactement pareil. Pour 4 heures : $f(4) = 80$ et $g(4) = 15 \times 4 + 10 = 70$: le second devient moins cher. Il n'y a donc pas de meilleure offre en soi — la réponse dépend de la durée, et 2 heures est précisément le moment où elles se valent. En dessous, le premier est plus avantageux ; au-dessus, le second.

Le ballon sur la plage

La courbe donne la hauteur d'un ballon lancé sur la plage de l'Hermitage, seconde par seconde.

À quels instants le ballon était-il à 4 mètres de haut ?



Une horizontale, deux intersections : deux antécédents.

On part de 4 sur l'axe vertical, on trace l'horizontale, et on regarde COMBIEN DE FOIS elle coupe la courbe. Deux fois : à 1 seconde et à 5 secondes. Le nombre 4 a donc deux antécédents. C'est normal : le ballon monte, redescend, et repasse par les mêmes hauteurs. Répondre « 1 seconde » seul serait une réponse incomplète — et c'est l'erreur la plus fréquente de tout le chapitre.

Pièges à éviter : Fonctions : image et antécédent

Lire $f(x)$ comme « f fois x ». Ce n'est pas une multiplication : les parenthèses désignent le nombre qu'on fait entrer dans la fonction.

Confondre les deux mots. Dans $f(3) = 7$, l'image est 7 et l'antécédent est 3 — jamais l'inverse.

Croire qu'un nombre n'a qu'un seul antécédent. C'est vrai sur une droite non horizontale, faux dès que la courbe monte puis redescend : il faut alors donner TOUTES les valeurs.

Chercher une image alors qu'on demande un antécédent. Si l'énoncé fournit le prix payé et non la quantité, il faut résoudre une équation, pas remplacer.

Oublier les parenthèses en substituant un nombre négatif : $-2 \times (-3)$ vaut $+6$, et sauter l'écriture fait perdre le signe.

Prendre le tableau de valeurs pour la fonction entière. Il n'en montre que quelques colonnes ; entre deux d'entre elles, on ne sait rien.

À retenir : Fonctions : image et antécédent

Une fonction associe à chaque nombre de départ UNE SEULE image.

x est l'antécédent, $f(x)$ est l'image : le nom dépend du sens de lecture.

Calculer une image, c'est REMPLACER. Chercher un antécédent, c'est RÉSOUDRE.

Un nombre peut avoir plusieurs antécédents — il faut les donner tous.

Sur un graphique : vertical puis horizontal pour une image, l'inverse pour un antécédent.

$f(x) = ax$ est linéaire et passe par l'origine ; $f(x) = ax + b$ est affine.

Exercices corrigés : Fonctions : image et antécédent

1. Soit $f(x) = 4x - 1$. Calcule $f(3)$.

Correction :

On remplace x par 3 : $4 \times 3 - 1 = 12 - 1 = 11$. Donc $f(3) = 11$.

2. Soit $f(x) = -2x + 5$. Quelle est l'image de 3 ?

Correction :

On écrit la substitution en entier : $-2 \times 3 + 5 = -6 + 5 = -1$. L'image de 3 est -1 .

3. On sait que $f(5) = 20$. Écris la phrase correcte avec les mots « image » et « antécédent ».

Correction :

20 est l'image de 5 par f , et 5 est un antécédent de 20. L'ordre compte : ce qui est entre parenthèses entre dans la machine.

4. Soit $f(x) = 2x + 1$. Quel est l'antécédent de 9 ?

Correction :

On donne le résultat, donc on résout : $2x + 1 = 9$, puis $2x = 8$, donc $x = 4$. Vérification : $2 \times 4 + 1 = 9$. C'est juste.

5. Une randonnée guidée coûte $f(x) = 8x + 20$ euros pour x personnes. Un groupe a payé 92 €. Combien était-il de personnes ?

Correction :

On résout $8x + 20 = 92$, donc $8x = 72$, donc $x = 9$. Le groupe comptait 9 personnes. Vérification : $8 \times 9 + 20 = 72 + 20 = 92$.

6. Dans un tableau de valeurs, que trouve-t-on sur la première ligne, et sur la seconde ?

Correction :

Sur la première, les nombres de départ, c'est-à-dire les antécédents. Sur la seconde, leurs images. Descendre donne une image, remonter donne un antécédent.

7. Dans un tableau, x passe de 0 à 1 puis de 1 à 2, et l'image augmente de 3 à chaque fois en partant de 1. Quelle fonction correspond ?

Correction :

L'image part de 1 pour $x = 0$: c'est le montant fixe. Elle augmente de 3 par unité : c'est le coefficient. La fonction est $f(x) = 3x + 1$. Contrôle : $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, $f(2) = 7$.

8. La courbe d'une fonction linéaire $f(x) = ax$ passe toujours par quel point ?

Correction :

Par l'origine, le point de coordonnées $(0 ; 0)$ — car $f(0) = a \times 0 = 0$. C'est ce qui la distingue d'une fonction affine dont le b n'est pas nul.

9. Sur une courbe, l'horizontale d'ordonnée 5 coupe le tracé en deux endroits. Que peut-on en conclure ?

Correction :

Le nombre 5 possède deux antécédents : deux valeurs de départ différentes ont la même image. C'est impossible sur une droite non horizontale, mais courant sur une courbe qui monte puis redescend. La réponse doit donner les deux valeurs.

10. Deux loueurs de vélo : $f(x) = 4x$ et $g(x) = 3x + 5$, en euros pour x heures. Pour 3 heures, lequel est le moins cher ?

Correction :

$f(3) = 12$ et $g(3) = 3 \times 3 + 5 = 14$. Le premier est moins cher pour 3 heures. Attention : ce n'est pas vrai pour toutes les durées — pour 6 heures, $f(6) = 24$ contre $g(6) = 23$, et l'ordre s'inverse.