

Fractions et nombres rationnels — cours de maths 4e

Une même quantité s'écrit d'une infinité de façons : $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{50}{100}$, 0,5. Savoir reconnaître que ce sont le même nombre, choisir l'écriture la plus commode et ranger des fractions, c'est tout l'objet de cette fiche — avant de savoir calculer avec.

LE MOT DE 4E

Rationnel : tout nombre qui s'écrit $\frac{a}{b}$, b non nul

LA PROPRIÉTÉ CLÉ

On multiplie ou divise en HAUT et en BAS

LE PIÈGE

Un grand dénominateur fait une petite fraction

À quoi ça sert : Fractions et nombres rationnels

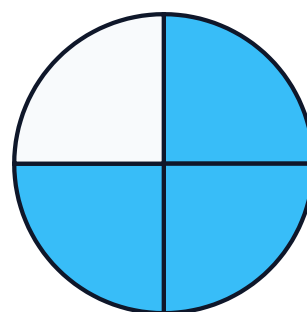
Les fractions sont l'écriture de ce qui se partage. À La Réunion, c'est la recette de rougail qu'on fait pour six quand on est quatre, le partage d'un terrain entre héritiers, la demi-heure de battement entre deux cars. Et le passage à l'écriture décimale est constant : un prix affiché 12,50 €, c'est douze euros et une demi-unité — la caisse, elle, ne connaît que les décimaux, alors que la recette ne parle qu'en fractions.

Un peu d'histoire : Fractions et nombres rationnels

Les Égyptiens, il y a quatre mille ans, n'écrivaient que des fractions de numérateur 1 : pour dire $\frac{3}{4}$, ils écrivaient $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Le papyrus Rhind contient une table entière pour décomposer les autres fractions de cette façon. Notre barre de fraction, elle, vient des mathématiciens arabes du XIIe siècle, et le mot « rationnel » ne vient pas de « raison » mais de « ratio », le rapport.

Définition : Fractions et nombres rationnels

Une fraction $\frac{a}{b}$, c'est le partage d'un tout en b parts égales dont on prend a. C'est aussi un quotient : le nombre qui, multiplié par b, donne a. Un nombre est dit rationnel lorsqu'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction de deux entiers, avec un dénominateur non nul.



3/4

$\frac{3}{4}$: le tout est partagé en 4 parts égales, et on en prend 3.

Propriétés : Fractions et nombres rationnels

Deux écritures, un seul nombre

$\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{4}$ recouvrent exactement la même surface : ce sont deux écritures du même nombre. On passe de l'une à l'autre en multipliant en haut et en bas par 2.



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{4}$

même longueur coloriée

Simplifier, c'est diviser des deux côtés

Simplifier une fraction, c'est diviser le numérateur ET le dénominateur par un même nombre. La valeur ne change pas, seule l'écriture devient plus courte.

Données		numérateur
	au départ	
	on divise par	
	il reste	

$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$: la valeur ne change pas

Le rang sur la droite

Posées sur la droite graduée, les fractions se rangent toutes seules. Attention : à numérateur égal, plus le dénominateur est grand, plus la fraction est petite.



$\frac{1}{5}$ est plus PETIT que $\frac{1}{2}$

L'écriture décimale

Une fraction est un quotient : en posant la division, on obtient son écriture décimale. $\frac{1}{2}$ donne 0,5, et $\frac{1}{4}$ donne 0,25.

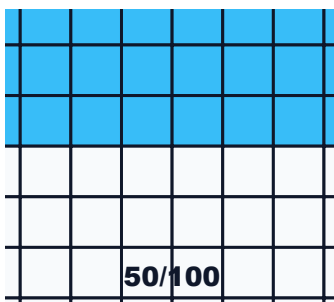
$$1 \div 2$$

quotient : 0,5 reste : 0

Vérification :
dividende =
diviseur ×

Les nombres rationnels

Un décimal est toujours un rationnel : 0,5 vaut 50 carreaux sur 100, donc $\frac{50}{100}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. L'inverse est faux — $\frac{1}{3}$ n'a pas d'écriture décimale exacte.



quotient +
reste

$$0,5 = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

une fraction est un
quotient

La formule : Fractions et nombres rationnels

POUR TOUT ENTIER K NON NUL

$$a / b = (a \times k) / (b \times k)$$

C'est la propriété qui fonde tout :
simplifier, mettre au même
dénominateur, comparer. On agit
toujours en haut ET en bas.



$$3/4 = 6/8$$

quatre parts ou huit, la surface est la même

Méthode : Fractions et nombres rationnels

1. Simplifier

On cherche un nombre qui divise à la fois le numérateur et le dénominateur, on divise les deux, et on recommence tant que c'est possible. On s'arrête quand plus aucun nombre ne divise les deux.

Données		numérateur
	au départ	
	÷ 2	

2. Comparer

Si les dénominateurs sont les mêmes, on compare les numérateurs : $\frac{2}{5}$ est plus petit que $\frac{3}{5}$. Sinon, on met au même dénominateur, ou on passe par l'écriture décimale.

3. Reconnaître un rationnel

On se demande si le nombre peut s'écrire comme un quotient de deux entiers. Tout entier en est un — 7 vaut $\frac{7}{1}$ — et tout décimal aussi, en le mettant sur 10, 100 ou 1000.

Données		numérateur
	$\div 3$	

$12/18 = 2/3$, en deux étapes



$2/5$



$3/5$

mêmes parts : on compte,
c'est tout

Selon ce que l'on cherche : Fractions et nombres rationnels

Reconnaître deux écritures du même nombre

On simplifie les deux fractions au maximum : si elles aboutissent à la même écriture, ce sont deux écritures du même nombre.

Ranger des fractions

On les met au même dénominateur, ou on calcule leurs écritures décimales, puis on compare les nombres obtenus.

Changer d'écriture

On pose la division pour aller de la fraction au décimal. Dans l'autre sens, on écrit le décimal sur 10, 100 ou 1000, puis on simplifie.

Exemples corrigés : Fractions et nombres rationnels

Laquelle est égale à $\frac{1}{2}$?

On propose quatre fractions : $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{3}$.

Laquelle est égale à $\frac{1}{2}$?



$1/2$

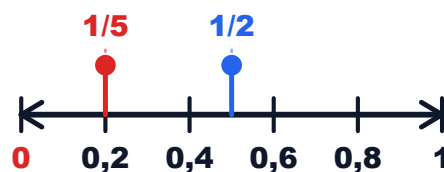


$2/4$

La plus grande

On compare $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{5}$.

Laquelle est la plus grande ?



C'est $\frac{1}{2}$. Les quatre fractions ont le même numérateur, 1 : on partage donc le même tout en 2, 3, 4 ou 5 parts. Plus on partage, plus chaque part est petite. La plus grande est celle qui a le plus PETIT dénominateur, donc $\frac{1}{2}$. ⚠ C'est l'inverse de ce que l'intuition dit.

C'est $\frac{2}{4}$. On passe de $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{4}$ en multipliant le numérateur et le dénominateur par 2 : $1 \times 2 = 2$ et $2 \times 2 = 4$. Les trois autres ne se simplifient pas en $\frac{1}{2}$ — pour $\frac{1}{3}$, il faudrait que le dénominateur soit le double du numérateur, ce qui n'est pas le cas.

Pourquoi 0,5 est rationnel

On considère le nombre 0,5.

Est-ce un nombre rationnel ? Justifie.

$$1 \div 2$$

quotient :
0,5

reste : 0

Vérification : dividende =
diviseur $\times$ quotient + reste

une fraction est un quotient

Oui. Un nombre est rationnel s'il peut s'écrire comme quotient de deux entiers avec un dénominateur non nul. Or 0,5 se lit « cinq dixièmes », donc $0,5 = \frac{5}{10}$, qui se simplifie en $\frac{1}{2}$ en divisant en haut et en bas par 5. C'est bien un quotient de deux entiers, donc 0,5 est rationnel. La division posée fait le chemin inverse : $1 \div 2 = 0,5$.

Pièges à éviter : Fractions et nombres rationnels

Ne simplifier qu'un seul des deux nombres : on divise le numérateur ET le dénominateur par le même nombre, sinon la valeur change.

Croire qu'une fraction est plus grande parce que son dénominateur l'est : $\frac{1}{5}$ est plus PETIT que $\frac{1}{2}$, parce qu'on partage en plus de parts.

Comparer deux fractions de dénominateurs différents sans rien faire : il faut d'abord les mettre au même dénominateur, ou passer par leur écriture décimale.

À retenir : Fractions et nombres rationnels

Deux fractions sont égales quand on passe de l'une à l'autre en multipliant — ou en divisant — le numérateur et le dénominateur par le même nombre non nul.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers et b non nul. Tous les décimaux en sont, puisque $0,5 = \frac{1}{2}$.

À numérateurs égaux, la plus grande fraction est celle qui a le plus PETIT dénominateur : plus on partage, plus les parts sont petites.

Exercices corrigés : Fractions et nombres rationnels

1. Simplifier $\frac{6}{8}$ au maximum.

Correction :

6 et 8 sont tous les deux divisibles par 2 : on divise en haut et en bas, ce qui donne $\frac{3}{4}$. Ensuite, plus aucun nombre ne divise à la fois 3 et 4 : la fraction est irréductible. Donc $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

2. Quelle fraction est la plus grande : $\frac{2}{5}$ ou $\frac{3}{5}$?

Correction :

Les deux fractions ont le même dénominateur : les parts sont donc de la même taille, et il suffit de comparer les numérateurs. Comme 3 est plus grand que 2, c'est $\frac{3}{5}$ la plus grande.

3. À quel nombre décimal correspond $\frac{1}{4}$?

Correction :

Une fraction est un quotient : on pose $1 \div 4$, ce qui donne 0,25. On peut aussi le retrouver par les fractions égales : $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, et $\frac{25}{100}$ se lit 0,25.

4. Un nombre rationnel peut s'écrire sous quelle forme ? Le nombre 7 en est-il un ?

Correction :

Un nombre rationnel s'écrit $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers et b NON NUL — la condition sur le dénominateur est essentielle, puisqu'on ne divise jamais par zéro. Et oui, 7 est rationnel : il s'écrit $\frac{7}{1}$. Tous les entiers et

tous les décimaux sont des rationnels.