

Grandeurs composées et unités — cours de maths 4e

Une vitesse en km/h, un prix en €/kg, une aire en m² : ces unités ne sont pas des étiquettes, ce sont des calculs écrits. Comprendre qu'une unité SE CALCULE change tout — la conversion cesse d'être un tableau à retenir, et l'unité devient le moyen le plus rapide de repérer une erreur.

LE MOT DE 4E

Grandeur produit (on multiplie) et grandeur quotient (on divise)

LA RÈGLE

L'unité subit la même opération que les nombres

LE PIÈGE

1 m² ne fait pas 100 cm² mais 10 000

À quoi ça sert : Grandeurs composées et unités

Les grandeurs quotient sont ce qui rend le monde comparable. Au marché de Saint-Paul, deux étals ne vendent jamais les mêmes lots : c'est le prix au kilo qui départage. Sur la route du littoral, la vitesse dit ce qu'aucune distance seule ne dirait. Et le compteur électrique d'une maison compte des kilowattheures — un produit, celui de la puissance des appareils par le temps qu'ils tournent : c'est pourquoi un chauffe-eau de 2 kW allumé quatre heures coûte autant qu'une ampoule de 8 W laissée mille heures. Les conversions d'aire, elles, se paient au mètre carré : une erreur de facteur 100 sur un devis de carrelage, et la commande est fautive d'un ordre de grandeur.

Un peu d'histoire : Grandeurs composées et unités

Écrire une vitesse comme un quotient a mis longtemps à s'imposer : pour les Grecs, on ne divisait pas une distance par un temps, car on ne pouvait diviser que des grandeurs de même nature. C'est Nicolas Oresme, au XIV^e siècle, qui ose représenter la vitesse comme une grandeur à part entière — il en fait même un graphique, bien avant Descartes. L'écriture moderne des unités composées, avec sa barre de fraction et ses exposants, date de la fin du XIX^e siècle et de la construction du système métrique international : il fallait un langage où l'unité d'un résultat se déduise de celles des données, sans discussion possible.

Définition : Grandeurs composées et unités

Une grandeur **PRODUIT** s'obtient en multipliant deux grandeurs : une aire est une

Données	grandeur	unité	opération
	aire	m ²	on multiplie

longueur multipliée par une longueur, une énergie en kWh est une puissance multipliée par une durée. Une grandeur QUOTIENT s'obtient en divisant l'une par l'autre : une vitesse est une distance divisée par une durée, un prix au kilo est un prix divisé par une masse. Dans les deux cas, l'unité du résultat se fabrique en même temps que le nombre — et c'est elle qui garde la trace de l'opération.

Données	grandeur	unité	opération
	énergie	kWh	on multiplie
	vitesse	km/h	on divise
	prix au kilo	€/kg	on divise

l'exposant multiplie, la barre divise

L'unité trahit l'opération : un exposant vient d'une multiplication, une barre de fraction vient d'une division. « Kilowattheure » raconte littéralement son calcul.

Propriétés : Grandeurs composées et unités

Une grandeur produit vient d'une multiplication

Multiplier des mètres par des mètres donne des mètres CARRÉS — l'exposant 2 est la trace des deux facteurs. Multiplier des kilowatts par des heures donne des kilowattheures. ★ Le nom de l'unité raconte le calcul : « kilowattheure » se lit « kilowatt fois heure ».

Données	on multiplie	on obtient
	$m \times m$	m^2
	$m \times m \times m$	m^3
	$kW \times h$	kWh

l'unité se fabrique avec le calcul

Une grandeur quotient vient d'une division

Diviser des kilomètres par des heures donne des km/h. La barre de l'unité est la trace de la division — et elle se lit « par ». Un car qui fait 240 km en 3 h roule à $240 \div 3 = 80$ km/h, c'est-à-dire 80 km pour une heure.

Données	on divise	on obtient
	$km \div h$	km/h
	$\text{€} \div kg$	€/kg
	$L \div min$	L/min

la barre se lit « par »

« Par » veut dire « pour une unité de »

80 km/h ne signifie pas « 80 kilomètres et 1 heure » : cela signifie 80 kilomètres POUR UNE heure. C'est ce qui permet de comparer deux trajets de durées différentes — et d'inverser l'unité changerait complètement le sens, car des h/km mesureraient le temps mis pour un kilomètre.

Données	mesure	signification
	80 km/h	80 km pour 1 h
	4 €/kg	4 € pour 1 kg
	6 L/min	6 L pour 1 min

toujours « pour UNE unité »

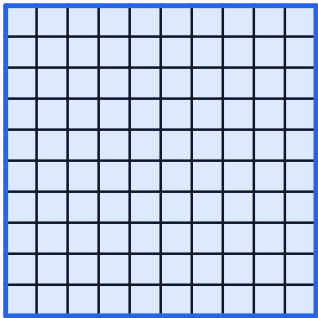
Convertir une aire : le facteur s'applique

Une dimension de plus, un facteur de

L'unité suffit à rejeter un résultat

deux fois

C'est la conséquence directe de tout ce qui précède, et non une règle à retenir. Une aire est un produit de deux longueurs : si $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, alors $1\text{ m}^2 = 100 \times 100 = 10\,000\text{ cm}^2$. Le carré de 1 m de côté se découpe en 100 carrés de 10 cm, et chacun vaut 100 cm^2 .



1 m^2 : 100 carrés de 100 cm^2 chacun

plus

La même idée monte d'un cran pour les volumes : trois longueurs, donc le facteur trois fois. De mètres en centimètres, une longueur se multiplie par 100, une aire par 10 000, un volume par 1 000 000. ⚠️ Répondre 100 pour une aire est l'erreur la plus fréquente du chapitre — c'est le facteur des longueurs, appliqué une seule fois.

Données	grandeur	
	longueur	100
	aire	10 000
	volume	1 000 000

le facteur suit le nombre de dimensions

Si une aire s'affiche en cm^3 , le résultat est faux — sans même vérifier les nombres. C'est le contrôle le plus rapide qui existe.

⚠️ Et il y en a un SECOND, différent : l'ordre de grandeur. « Un cycliste à 250 km/h » a une unité parfaitement correcte et une valeur absurde. Les deux contrôles se complètent.

Données	on lit	ce qu'on attend
	une aire en cm^3	l'unité
	un cycliste à 250 km/h	la valeur
	une pomme de 15 kg	la valeur

deux contrôles, deux défauts différents

La formule : Grandeurs composées et unités

POUR TOUTE GRANDEUR OBTENUE PAR UN CALCUL

unité du résultat = unités des données, avec la même opération

C'est la seule chose à retenir. $\text{m} \times \text{m}$ donne m^2 ; $\text{km} \div \text{h}$ donne km/h . Et c'est aussi ce qui explique les conversions :

Données	grandeur	unité	opération
	aire	m^2	on multiplie
	énergie	kWh	on multiplie
	vitesse	km/h	on divise
	prix au kilo	€/kg	on divise

l'exposant multiplie, la barre divise

une aire porte le facteur deux fois, un volume trois fois.

Méthode : Grandeurs composées et unités

1. Reconnaître la famille

On regarde l'unité, pas le contexte.

Un exposant — m^2 , m^3 , kWh — annonce une multiplication. Une barre de fraction — km/h, €/kg, kg/m^3 — annonce une division. L'unité dit quelle opération faire, avant même de lire l'énoncé en entier.

2. Calculer une grandeur quotient

L'unité donne l'ordre des opérations : « km/h » se lit « kilomètres par heure », donc on divise les kilomètres par les heures. On écrit l'unité à chaque ligne : si elle ne sort pas juste, c'est qu'on s'est trompé d'opération.

Données	on cherche	div
	une vitesse	2 km
	le résultat	km

l'unité dicte le calcul

3. Convertir sans tableau

On part de la conversion des LONGUEURS, qu'on connaît. Pour une aire, on l'applique deux fois ; pour un volume, trois fois. ★ Le contrôle est immédiat : en allant vers une unité plus petite, le nombre doit AUGMENTER — s'il diminue, on a divisé au lieu de multiplier.

Données	étape	ce qu'on fait
	1	1 m = 100 cm
	2	aire : $\times 100$ deux fois
	3	1 m ² : 10 000 cm ²

on refait le raisonnement

4. Contrôler un résultat

Deux questions, dans cet ordre.

L'unité est-elle la bonne pour ce qu'on cherche ? Puis : la valeur est-elle plausible dans le monde réel ?

La première se répond sans calcul ;

la seconde demande de connaître quelques ordres de grandeur — la taille d'une salle, la vitesse d'un vélo, la masse d'une pomme.

Selon ce que l'on cherche : Grandeurs composées et unités

Deux offres qu'on ne peut pas comparer

Des lots de masses différentes, des trajets de durées différentes : on ramène chacun à l'unité — €/kg, km/h — et la comparaison devient immédiate.

Un énoncé mélange les unités

Une pièce en mètres, des carreaux en centimètres : on convertit AVANT de calculer. C'est là que se perd la moitié des élèves.

On veut vérifier vite un résultat

On regarde l'unité seule. Une aire en cm^3 est fausse sans qu'on ait besoin de refaire un seul calcul.

On doit trouver l'unité d'un résultat

On applique aux unités la même opération qu'aux nombres. Des litres divisés par des minutes donnent des L/min, toujours.

Exemples corrigés : Grandeurs composées et unités

La vitesse du car

Un car parcourt 240 km en 3 heures.

Quelle est sa vitesse moyenne ?

Données		valeur
	distance	240 km
	durée	3 h
	vitesse	80 km/h

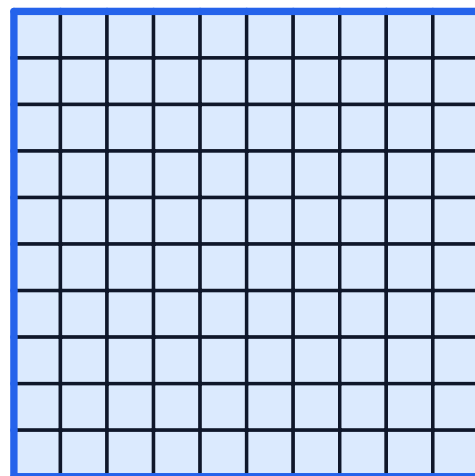
L'unité cherchée est le km/h, qui se lit « kilomètres par heure » : on divise donc les kilomètres par les

Du mètre carré au centimètre carré

Une table mesure 2 m^2 .

Combien cela fait-il en cm^2 ?

heures. Calcul : $240 \div 3 = 80$ km/h. Cela signifie que le car parcourt 80 km en une heure. ⚠ C'est une vitesse MOYENNE : il n'a pas roulé à 80 km/h à chaque instant.



1 m² se découpe en 100 carrés de 100 cm²

Une aire est un produit de deux longueurs, donc le facteur des longueurs s'applique deux fois. Or $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$, donc $1 \text{ m}^2 = 100 \times 100 = 10\,000 \text{ cm}^2$. Calcul : $2 \times 10\,000 = 20\,000 \text{ cm}^2$.

⚠ Répondre 200 cm² serait appliquer le facteur des LONGUEURS une seule fois. C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre, et le dessin la rend impossible : on compte les carreaux.

Le carrelage

Une pièce de 4 m sur 5 m. Des carreaux carrés de 25 cm de côté.

Combien de carreaux faut-il ?

Données		en m
	pièce	$4 \times 5 = 20 \text{ m}^2$
	carreau	$0,25 \times 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$
	nombre	$20 \div 0,0625 = 320$

Le nombre de carreaux est le quotient de deux AIRES. ⚠ On convertit d'abord dans la même unité : un carreau de 25 cm de côté mesure 0,25 m de côté, donc $0,25 \times 0,25 = 0,0625 \text{ m}^2$. La pièce fait

$$4 \times 5 = 20 \text{ m}^2. \text{ Calcul : } 20 \div 0,0625 = 320$$

carreaux. ★ Le contrôle par l'unité valide le résultat :
une aire divisée par une aire donne un NOMBRE
sans unité — et c'est bien un nombre de carreaux
qu'on cherchait.

Pièges à éviter : Grandeurs composées et unités

Traiter l'unité comme une étiquette qu'on recopie. Elle subit la même opération que les nombres : des mètres fois des mètres font des mètres carrés.

Convertir une aire avec le facteur des longueurs. $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$, pas 100 — le facteur s'applique deux fois.

Calculer avant de convertir. Une pièce en mètres et des carreaux en centimètres ne se divisent pas tels quels.

Inverser une unité composée. Des km/h et des h/km ne mesurent pas la même chose : l'une est une vitesse, l'autre un temps par kilomètre.

Lire « 80 km/h » comme « 80 km et 1 heure ». C'est 80 km POUR une heure — un rapport, pas deux quantités.

Oublier de contrôler l'unité du résultat. Une aire en cm^3 est fautive, et cela se voit avant tout calcul.

À retenir : Grandeurs composées et unités

Grandeur PRODUIT : on multiplie. L'unité porte un exposant — m^2 , m^3 , kWh.

Grandeur QUOTIENT : on divise. L'unité porte une barre — km/h, €/kg, kg/m^3 .

L'unité subit la MÊME opération que les nombres, et elle s'écrit à chaque ligne du calcul.

La barre se lit « par », c'est-à-dire « pour UNE unité de ».

Conversion : le facteur des longueurs s'applique deux fois pour une aire, trois fois pour un volume.

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}, \text{ donc } 1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2 \text{ et } 1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3.$$

Deux contrôles, différents : l'UNITÉ est-elle la bonne, puis la VALEUR est-elle plausible.

Exercices corrigés : Grandeurs composées et unités

1. Un appareil de 2 kW fonctionne 4 heures. Quelle énergie consomme-t-il ?

Correction :

L'énergie en kWh est un produit : $2 \times 4 = 8 \text{ kWh}$. L'unité raconte le calcul — kilowatt fois heure.

2. Un robinet remplit 36 L en 6 minutes. Quel est son débit ?

Correction :

Le débit s'exprime en L/min, donc on divise les litres par les minutes : $36 \div 6 = 6$ L/min.

3. On divise des kilogrammes par des mètres cubes. Quelle est l'unité du résultat, et comment se lit-elle ?

Correction :

L'unité est le kg/m^3 , qui se lit « kilogrammes par mètre cube ». C'est une masse volumique : la masse d'un mètre cube de matière.

4. Convertis 4,5 km en mètres.

Correction :

$1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m}$, donc $4,5 \times 1\,000 = 4\,500 \text{ m}$.

5. Convertis 3 m^2 en cm^2 .

Correction :

Le facteur des longueurs vaut 100, donc celui des aires vaut $100 \times 100 = 10\,000$. Calcul : $3 \times 10\,000 = 30\,000 \text{ cm}^2$.

6. Un élève calcule l'aire d'un rectangle et écrit « 24 cm^3 ». Sans refaire le calcul, que peut-on dire ?

Correction :

C'est faux : une aire est un produit de DEUX longueurs et s'exprime en cm^2 , pas en cm^3 . L'unité suffit à rejeter le résultat.

7. On lit « la masse d'une pomme : 15 kg ». Qu'en penses-tu ?

Correction :

L'unité est correcte — une masse s'exprime bien en kilogrammes — mais la valeur est absurde : une pomme pèse environ 150 g. C'est le contrôle par l'ORDRE DE GRANDEUR, distinct du contrôle par l'unité.

8. Étal A : 12 € les 3 kg. Étal B : 15 € les 5 kg. Lequel est le moins cher ?

Correction :

On ramène au prix au kilo : A donne $12 \div 3 = 4$ €/kg, B donne $15 \div 5 = 3$ €/kg. L'étal B est le moins cher. ★ C'est exactement à cela que sert un quotient : rendre comparables deux choses qui ne le sont pas.