

Les identités remarquables — cours de maths 4e

Trois produits reviennent si souvent qu'on finit par connaître leur développement par cœur : le carré d'une somme, le carré d'une différence, et le produit d'une somme par la différence. Rien de neuf pourtant — ce sont des doubles distributivités qu'on a appris à reconnaître. Et une seule erreur les guette toutes : oublier le double produit.

LE MOT CLÉ

Un carré est un produit par soi-même

LE GESTE

Reconnaître la forme, puis développer

LA RÈGLE D'OR

Un carré développé a TROIS termes

À quoi ça sert : les identités remarquables

Ces trois égalités sont d'abord des raccourcis de calcul mental, et de très bons. 101^2 ne se pose pas : c'est $(100 + 1)^2$, donc $10\,000 + 200 + 1 = 10\,201$. Et 99×101 ne se pose pas non plus, puisque c'est $(100 - 1)(100 + 1)$, c'est-à-dire $10\,000 - 1 = 9\,999$. Le même découpage sert dès qu'on borde une surface carrée : un bassin carré de x mètres de côté auquel on ajoute une margelle de 3 mètres gagne exactement deux bandes de $3x$ et un coin de 9 mètres carrés — c'est le dessin de cette fiche, en vrai. Plus tard, en 3^e puis au lycée, ces formes lues à l'envers servent à factoriser, donc à résoudre.

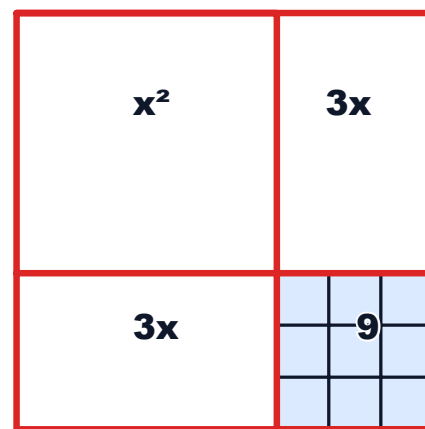
Un peu d'histoire : les identités remarquables

Le carré découpé de cette fiche est, mot pour mot, la proposition 4 du livre II des Éléments d'Euclide, vers 300 avant notre ère : couper une droite en deux, et le carré construit sur le tout vaut les deux carrés des morceaux plus deux fois le rectangle qu'ils forment. Il n'y avait ni lettres, ni signe égal, ni exposant : une identité remarquable était une figure, et la démonstration consistait à la découper. L'écriture x^2 , elle, est de René Descartes, en 1637.

Définition : les identités remarquables

Une identité remarquable est une égalité toujours vraie, quelle que soit la valeur des lettres, entre une forme factorisée fréquente et son développement. Il y en a trois en 4^e. Elles ne demandent aucune règle nouvelle : $(x + 3)^2$ signifie $(x + 3)(x + 3)$, et la

double distributivité fait le reste. Ce qui est « remarquable », c'est seulement qu'on remarque la forme au premier coup d'œil et qu'on écrit le résultat sans passer par les quatre produits.



un carré de côté $x + 3$, coupé en quatre morceaux

L'aire vaut $(x + 3)^2$ d'un seul tenant. Découpée, elle vaut x^2 , plus DEUX rectangles de $3x$, plus les neuf carrés du coin : $x^2 + 6x + 9$. La longueur x est dessinée au hasard — on ne la connaît pas.

Propriétés : les identités remarquables

Un carré est un produit

$(x + 3)^2$ ne veut pas dire « x^2 et 3^2 » : le carré d'une expression, c'est cette expression multipliée par elle-même. On écrit $(x + 3)(x + 3)$, et on développe comme n'importe quel produit de deux parenthèses.

Données	$\times$	x	$+ 3$
	x	x^2	$3x$
	$+ 3$	$3x$	9

$(x + 3)(x + 3)$: les deux cases du milieu sont égales

Le double produit

Les quatre produits donnent $x^2 + 3x + 3x + 9$. Les deux termes du milieu sont IDENTIQUES : leur somme est le double produit, ici $6x$. Un carré développé a donc trois termes, jamais deux.

	3	x
$+$	3	x
	6	x

les deux termes du milieu sont égaux

Quand le milieu s'annule

Changez un seul signe et tout bascule : dans $(x - 5)(x + 5)$, les deux termes du milieu deviennent $5x$ et $-5x$. Ils s'annulent, et il ne reste que $x^2 - 25$ — une différence de deux carrés.

Données	$\times$	x	$+ 5$
	x	x^2	$5x$
	$- 5$	$-5x$	-25

$(x - 5)(x + 5)$: $5x$ et $-5x$ s'annulent, il reste $x^2 - 25$

Trois formes à reconnaître

Deux parenthèses identiques : c'est un carré, et il y aura un double produit. Deux parenthèses qui ne diffèrent que par un signe : c'est une différence de carrés, et le milieu disparaîtra.

Données	la forme	son
	$(x + 3)^2$	cal d'u son
	$(x - 4)^2$	cal d'u différ
	$(x - 5)(x + 5)$	différ de d car

seule la 3e ligne perd son terme du milieu

La formule : les identités remarquables

LES TROIS IDENTITÉS

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\cdot (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\cdot (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Les deux premières gardent un double produit ; seule la troisième le perd, parce que $+ab$ et $-ab$ s'annulent. Dans $(a - b)^2$, le terme du milieu est négatif mais le dernier reste positif.

Méthode : les identités remarquables

1. Reconnaître

2. Réécrire en produit

3. Développer et réduire

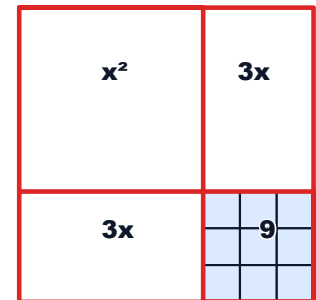
On regarde les deux parenthèses.
Identiques ? C'est un carré. Mêmes
nombres mais signes contraires ?
C'est une différence de carrés. Ni
l'un ni l'autre ? C'est une double
distributivité ordinaire, et il n'y a pas
d'identité à chercher.

On remplace le carré par le produit :
 $(x + 3)^2$ devient $(x + 3)(x + 3)$.
Cette ligne coûte trois secondes et
rend l'oubli du double produit
impossible, puisqu'on voit les deux
parenthèses.

Données	x	x	+ 3
	x	x ²	3x
	+ 3	3x	9

$(x + 3)(x + 3)$: les deux cases
du milieu sont égales

On effectue les quatre produits, puis
on regroupe les deux termes
semblables du milieu. On vérifie
enfin qu'il reste bien trois termes —
ou deux seulement dans le cas de
la différence de carrés.



Selon ce que l'on cherche : les identités remarquables

Développer plus vite

Une fois la forme reconnue, on écrit
le développement en une ligne au
lieu de quatre. C'est le seul vrai
bénéfice de ces formules : du
temps gagné sur un calcul qu'on
sait déjà faire.

Données	la forme	son
	$(x + 3)^2$	cal d'u sorr
	$(x - 4)^2$	cal d'u différ
	$(x - 5)(x + 5)$	différ de d car

seule la 3e ligne perd son
terme du milieu

Calculer de tête

$101^2 = (100 + 1)^2 = 10\,000 + 200 + 1$. Et $99 \times 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 10\,000 - 1$. Les
identités marchent avec des
nombres, pas seulement avec des
lettres.

	1	0	0	0	0
			2	0	0
+					1
	1	0	2	0	1

$$101^2 = (100 + 1)^2$$

Préparer la factorisation

Le tableau des formes se lit aussi
de droite à gauche : voir $x^2 - 49$ et
reconnaître $(x - 7)(x + 7)$, c'est
déjà factoriser. C'est l'objet de la
fiche suivante.

Données	x	x	+ 5
	x	x ²	5x
	- 5	-5x	-25

$(x - 5)(x + 5)$: 5x et -5x
s'annulent, il reste $x^2 - 25$

Exemples corrigés : les identités remarquables

Développer un carré

On veut développer $(x + 3)^2$.

Quelle expression obtient-on ?

Données	x	x	+ 3
	x	x^2	3x
	+ 3	3x	9

$(x + 3)(x + 3)$: les deux cases du milieu sont égales

On écrit d'abord le carré comme un produit : $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$. Les quatre produits donnent $x^2 + 3x + 3x + 9$. Les deux termes du milieu sont semblables : $3x + 3x = 6x$. Le résultat est $x^2 + 6x + 9$.

Quand il ne reste que deux termes

On veut développer $(x - 5)(x + 5)$.

Pourquoi le résultat n'a-t-il que deux termes ?

Données	x	x	+ 5
	x	x^2	5x
	- 5	-5x	-25

$(x - 5)(x + 5)$: 5x et -5x s'annulent, il reste $x^2 - 25$

Les quatre produits donnent $x^2 + 5x - 5x - 25$.

Les deux termes du milieu sont opposés : $5x -$

$5x = 0$, ils disparaissent. Il reste $x^2 - 25$. ⚠

Attention à ne pas confondre avec $(x - 5)^2$, qui vaut

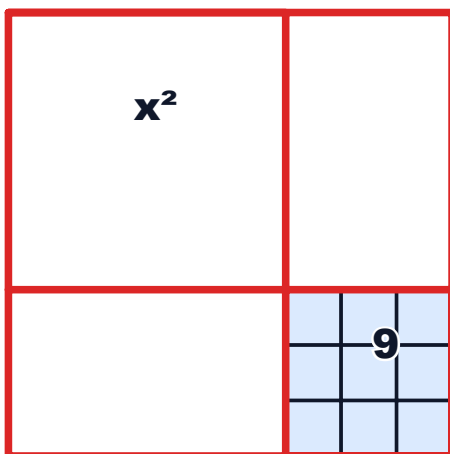
$x^2 - 10x + 25$: là, les deux parenthèses sont

identiques, donc les termes du milieu s'ajoutent au lieu de s'annuler.

L'erreur du carré

Un élève écrit $(x + 3)^2 = x^2 + 9$.

Que manque-t-il, et comment le voir sans calculer ?



voilà ce qu'il a gardé : les deux coins seulement

Il manque le double produit, $6x$. Le dessin le montre d'un coup d'œil : l'élève n'a gardé que le carré x^2 et les neuf carrés du coin, alors que les deux rectangles valent $3x$ chacun — soit la moitié de la figure. Le calcul le confirme : $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$. ★ Et le test numérique tranche sans discussion : pour $x = 1$, à gauche $(1 + 3)^2 = 16$, à droite $1 + 9 = 10$.

Pièges à éviter : les identités remarquables

Oublier le double produit : $(x + 5)^2$ ne fait pas $x^2 + 25$, mais $x^2 + 10x + 25$. Le carré d'une somme n'est jamais la somme des carrés — les deux rectangles du dessin valent $5x$ chacun, et ils comptent.

Confondre le carré d'une différence et la différence de deux carrés : $(x - 4)^2$ fait $x^2 - 8x + 16$, alors que $(x - 4)(x + 4)$ fait $x^2 - 16$. Deux parenthèses identiques, ou deux parenthèses de signes contraires : ce n'est pas la même chose.

Perdre le signe du double produit : dans $(x - 4)^2$, le terme du milieu est NÉGATIF ($-8x$), mais le dernier terme reste positif, puisque $(-4) \times (-4) = +16$.

À retenir : les identités remarquables

Le carré d'une expression est cette expression multipliée par elle-même : $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$. Tout le reste s'en déduit par la double distributivité.

Un carré développé a TROIS termes : le carré du premier, le double produit, le carré du second. C'est le double produit qui s'oublie.

Seule la forme $(a - b)(a + b)$ perd son terme du milieu, parce que $+ab$ et $-ab$ s'annulent : elle donne $a^2 - b^2$.

Exercices corrigés : les identités remarquables

1. Pourquoi peut-on écrire $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$?

Correction :

Parce que le carré d'un nombre signifie ce nombre multiplié par lui-même. Ici, le « nombre » est l'expression entière $x + 3$: la mettre au carré, c'est la multiplier par elle-même. C'est de là que part tout le développement.

2. Développer : $(x + 3)^2$.

Correction :

$(x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$. ⚠ La réponse $x^2 + 9$ oublie le double produit $6x$.

3. Développer : $(x - 5)(x + 5)$.

Correction :

$x^2 + 5x - 5x - 25 = x^2 - 25$. Les deux termes du milieu sont opposés, donc ils s'annulent : c'est une différence de deux carrés.

4. L'expression développée $x^2 - 49$ provient de quelle identité ?

Correction :

De $(x - 7)(x + 7)$, car $49 = 7^2$ et il n'y a pas de terme en x : c'est la signature d'une différence de deux carrés. ⚠ Ce n'est ni $(x - 7)^2$ ni $(x + 7)^2$, qui donneraient tous deux un terme en x et un $+49$.

5. Un élève écrit $(x + 5)^2 = x^2 + 25$. A-t-il raison ?

Correction :

Non : il manque le double produit. $(x + 5)^2 = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$. Contrôle avec $x = 1$: à gauche $6^2 = 36$, à droite $1 + 25 = 26$.

6. Un élève écrit $(x - 4)^2 = x^2 - 16$. A-t-il raison ?

Correction :

Non : il confond deux identités. $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ — deux parenthèses identiques, donc un double produit, et un dernier terme POSITIF puisque $(-4) \times (-4) = +16$. C'est $(x - 4)(x + 4)$ qui vaut $x^2 - 16$.