

Multiples, diviseurs et division euclidienne — cours de maths 4e

Savoir si une division tombe juste sans la poser : c'est ce que permettent les critères de divisibilité, et c'est ce qui rend possible de simplifier une fraction, de constituer des lots sans reste, ou de prévoir quand deux bus se croiseront. En quatrième, la division euclidienne donne un nom à ce qui reste quand ça ne tombe pas juste.

UNE SEULE RELATION

« multiple de » et « diviseur de » disent la même chose, dans les deux sens

DEUX FAMILLES DE CRITÈRES

2, 5, 10 regardent les UNITÉS · 3 et 9 regardent la SOMME des chiffres

LE PIÈGE

L'égalité ne suffit pas : le reste doit être plus petit que le diviseur

À quoi ça sert : Multiples, diviseurs et division euclidienne

La divisibilité est la question qu'on se pose chaque fois qu'il faut partager sans casser. Un professeur qui prépare des lots de matériel, un organisateur qui répartit des équipes, un pâtissier qui découpe une plaque : tous cherchent un diviseur commun. À l'inverse, quand deux phénomènes se répètent à leur propre rythme et qu'on veut savoir quand ils retomberont ensemble, on cherche un multiple commun — deux bus qui passent toutes les 6 et 8 minutes se croisent toutes les 24. Le même raisonnement date les marées de coefficient exceptionnel, les alignements de planètes, et le retour des années bissextiles. Les engrenages en sont l'illustration mécanique : deux roues de 12 et 18 dents reviennent dans leur position de départ après 36 dents, et un horloger qui veut qu'elles ne s'usent pas toujours au même endroit choisit exprès des nombres de dents sans diviseur commun.

Un peu d'histoire : Multiples, diviseurs et division euclidienne

Les critères de divisibilité par 3 et par 9 ne sont pas des astuces : ils viennent de ce que 10 laisse un reste de 1 quand on le divise par 9, et donc que 10, 100, 1000 aussi. Chaque chiffre pèse alors autant que sa valeur, et c'est pourquoi leur somme suffit. Les mathématiciens indiens du VII^e siècle utilisaient déjà cette propriété pour vérifier leurs calculs — la « preuve par neuf », qui s'est enseignée en France jusqu'aux années 1970. Elle a un défaut que ses utilisateurs connaissaient : elle repère beaucoup d'erreurs, mais pas toutes. Intervertir deux chiffres, par exemple, ne change pas leur somme, et l'erreur passe au travers. C'est un bon exemple d'un contrôle qui a de la valeur sans être une preuve — comme l'ordre de grandeur, il dit « c'est peut-être juste » et jamais « c'est juste ».

Définition : Multiples, diviseurs et division euclidienne

Un nombre est **MULTIPLE** d'un autre lorsqu'il s'obtient en le multipliant par un entier ; l'autre en est alors un **DIVISEUR**. $42 = 6 \times 7$: 42 est un multiple de 6, et 6 est un diviseur de 42. ★ Ce sont deux façons de dire **UNE SEULE** relation, comme « parent » et « enfant » — les deux mots ne s'échangent jamais. Le multiple est toujours le plus grand des deux.

$$47 \div 6$$

quotient
: 7

reste : 5

Vérification : $\text{dividende} = \text{diviseur} \times \text{quotient} + \text{reste}$

$$47 = 6 \times 7 + 5, \text{ et } 5 < 6$$

Le quotient et le reste se lisent côte à côte, et c'est ce voisinage qui compte : on a fait 7 parts de 6, et il reste 5. Cinq, c'est trop peu pour une part de plus — sinon on l'aurait faite. Voilà pourquoi le reste est **TOUJOURS** plus petit que le diviseur, et pourquoi cette condition fait partie de la définition.

Propriétés : Multiples, diviseurs et division euclidienne

Multiple et diviseur : une relation, deux mots

Dire « 42 est un multiple de 6 » et « 6 est un diviseur de 42 », c'est dire la même chose. ⚠ Le test est toujours le même : on divise, et on regarde le **RESTE**. S'il vaut zéro, la relation existe ; sinon elle n'existe pas. « Presque divisible » ne veut rien dire.

Données	on dit	de
	42 est un multiple	de
	6 est un diviseur	de
	le multiple	est plus grand

2, 5 et 10 : seul le chiffre des unités compte

Ces trois critères ne regardent **QUE** le dernier chiffre — le reste du nombre ne compte pas, même s'il en a dix. Par 2 si le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ; par 5 s'il est 0 ou 5 ; par 10 s'il est 0. ★ Un nombre divisible par 10 l'est forcément par 2 **ET** par 5 : c'est le seul cas où les trois tombent ensemble.

Données	divisible par	si un chiffre
	2	0, 2, 4, 6, 8
	5	0, 5
	10	0

3 et 9 : c'est la somme des chiffres qui décide

Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres l'est, et par 9 si cette même somme est divisible par 9. Pour $4275 : 4 + 2 + 7 + 5 = 18$, qui est divisible par 3 et par 9. ★ Le critère transforme un test sur un grand nombre en un test sur un tout petit — c'est exactement à cela qu'il sert.

Données	le nombre	son
	4275	
	1234	
	3438	

la somme décide, pas le nombre

les deux mots ne s'échangent pas

on ne regarde que le dernier chiffre

Multiple de 9 $\Rightarrow$ multiple de 3, jamais l'inverse

Puisque 9 est lui-même un multiple de 3, tout multiple de 9 est un multiple de 3. Mais la réciproque est FAUSSE : ⚠ 6 est divisible par 3 et pas par 9. Un seul contre-exemple suffit à réfuter une affirmation générale — et celui-là tient en un chiffre.

Données	si	a
	divisible par 9	divisible par 3
	divisible par 3	pas forcément divisible par 9
	6	par 3, pas par 9

l'implication ne marche que dans un sens

La division euclidienne, et sa seconde condition

Diviser 47 par 6 donne un quotient 7 et un reste 5 : on écrit $47 = 6 \times 7 + 5$. ⚠ Mais l'égalité ne suffit PAS. Il faut aussi que le reste soit plus petit que le diviseur : $0 \leq r < b$. Sans cette condition, on pourrait aussi écrire $47 = 6 \times 6 + 11$ — égalité juste, division fausse.

$$89 \div 7$$

quotient : 12 reste : 5

Vérification :
dividende =
diviseur $\times$
quotient +
reste

$$89 = 7 \times 12 + 5, \text{ et } 5 < 7$$

Chercher les diviseurs PAR PAIRES

Chaque diviseur trouvé en donne un second : celui qui le complète.

Pour 36, on part de 1 et on avance — 1×36 , 2×18 , 3×12 , 4×9 , 6×6 — et on s'arrête quand les deux se croisent. ★ Cette méthode garantit de n'en oublier aucun, ce que la recherche au hasard ne garantit jamais.

Données	paire	produit
	1 et 36	36
	2 et 18	36
	3 et 12	36
	4 et 9	36
	6 et 6	36

on s'arrête quand elles se croisent

La formule : Multiples, diviseurs et division euclidienne

DIVISION EUCLIDIENNE DE A PAR B

$$a = b \times q + r$$

avec $0 \leq r < b$

Les DEUX parties comptent. L'égalité dit comment le dividende se reconstruit ; la condition sur le reste est ce qui rend le quotient et le reste UNIQUES. Sans elle, on pourrait écrire

Données	écriture	verdict
	$47 = 6 \times 7 + 5$	juste : $5 < 6$
	$47 = 6 \times 6 + 11$	FAUX : $11 > 6$
	$47 = 6 \times 8 - 1$	FAUX : reste négatif

l'égalité seule ne suffit pas

une infinité d'égalités justes pour une même division.

Méthode : Multiples, diviseurs et division euclidienne

1. Tester si un nombre est multiple d'un autre

On divise, et on regarde le reste.
S'il vaut zéro, c'est un multiple ;
sinon, non. ★ Quand le diviseur est 2, 3, 5, 9 ou 10, le critère évite de poser la division — c'est tout son intérêt.

Données	le diviseur	méthode
	2, 5, 10	regarder les unités
	3, 9	la somme des chiffres
	les autres	poser la division

chaque diviseur a sa méthode

2. Appliquer les cinq critères d'un coup

On regarde d'abord le chiffre des unités — il règle 2, 5 et 10 en un instant. Puis on additionne les chiffres — cela règle 3 et 9. ★
Deux contrôles rapides derrière : si 9 marche, 3 marche forcément ; si 10 marche, 2 et 5 marchent forcément.

Données	2025	test
	unités : 5	par 5 ✓, pas par 2 ni 10
	somme : 9	par 3 ✓ et par 9 ✓

les unités, puis la somme

3. Poser une division euclidienne

On cherche le plus grand multiple du diviseur qui ne dépasse pas le dividende ; ce qui manque pour l'atteindre est le reste. ⚠ Deux contrôles avant de conclure : l'égalité $a = b \times q + r$ doit tomber, ET le reste doit être plus petit que le diviseur.

$$154 \div 12$$

quotient : 12 reste : 10

Vérification :
dividende =
diviseur ×
quotient +
reste

$$154 = 12 \times 12 + 10, \text{ et } 10 < 12$$

4. Lister tous les diviseurs

On avance à partir de 1, et pour chaque diviseur trouvé on note aussitôt son complémentaire. On s'arrête dès que les deux nombres de la paire se croisent. ★ Tout nombre a au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.

5. Lots ou rendez-vous ? Deux problèmes inverses

⚠ C'est l'erreur centrale du chapitre. Constituer des LOTS sans reste, c'est chercher un DIVISEUR commun, et on prend le plus GRAND. Savoir quand deux phénomènes retombent ensemble,

Données	pour 60	on trouve
	1 × 60	1 et 60
	2 × 30	2 et 30
	3 × 20	3 et 20
	4 × 15	4 et 15
	5 × 12	5 et 12
	6 × 10	6 et 10

12 diviseurs, sans en oublier

c'est chercher un MULTIPLE commun, et on prend le plus PETIT. Les deux mots se ressemblent, les deux calculs sont inverses.

Données	la question	ce qu'on cherche
	faire des lots	D
	se recroiser	M

deux calculs opposés

Selon ce que l'on cherche : Multiples, diviseurs et division euclidienne

On me demande si un nombre en divise un autre

On applique le critère s'il en existe un, sinon on pose la division. Le reste décide, et lui seul.

On me demande le reste d'une division

On cherche le plus grand multiple du diviseur sous le dividende. On vérifie ensuite que le reste est bien plus petit que le diviseur.

On me demande de simplifier une fraction

On cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur — les critères permettent d'en trouver un sans essayer au hasard.

On me parle de lots, d'équipes ou de rendez-vous

On identifie d'abord le type : partager sans reste appelle un diviseur commun, retomber ensemble appelle un multiple commun.

Exemples corrigés : Multiples, diviseurs et division euclidienne

L'égalité juste, la division fausse

Un élève écrit : « 47 divisé par 6 donne un quotient de 6 et un reste de 11 », car $6 \times 6 + 11 = 47$.

A-t-il raison ?

47 ÷ 6

quotient :
7

reste : 5

**Vérification : dividende =
diviseur × quotient + reste**

Son égalité est parfaitement juste : $6 \times 6 = 36$, et $36 + 11 = 47$. Mais la division euclidienne demande DEUX choses, et la seconde n'est pas respectée : il faut $0 \leq r < b$, or $11 > 6$. Un reste de 11 signifie qu'on peut encore faire une part de 6 — il en resterait alors 5. La bonne réponse est $47 = 6 \times 7 + 5$. ★ C'est cette seconde condition qui rend le quotient et le reste UNIQUES. Sans elle, on pourrait écrire $47 = 6 \times 5 + 17$, $47 = 6 \times 4 + 23$, et ainsi de suite sans fin.

Les deux bus

Deux bus partent ensemble d'un arrêt. L'un y repasse toutes les 6 minutes, l'autre toutes les 8 minutes.

Dans combien de minutes se croiseront-ils à nouveau ?

Les lots du professeur

Un professeur a 48 crayons et 36 gommes. Il veut faire des lots identiques, sans rien laisser.

Quel est le plus grand nombre de lots possible ?

Données	diviseurs de	communs
	48	1, 2, 3, 4, 6, 12
	36	1, 2, 3, 4, 6, 12
	le plus grand	12

Faire des lots identiques sans reste, c'est chercher un diviseur commun aux deux quantités. Les diviseurs de 48 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Ceux de 36 sont 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Les diviseurs COMMUNS sont donc 1, 2, 3, 4, 6 et 12, et le plus grand vaut 12. On peut faire 12 lots, avec $48 \div 12 = 4$ crayons et $36 \div 12 = 3$ gommes chacun. ⚠ « Le plus grand nombre de LOTS » n'est pas « le plus gros lot » : plus il y a de lots, plus chacun est petit. Lire la question avant de choisir le plus grand ou le plus petit.

Données	multiples de 6	multiples de 8
	6, 12, 18	8, 16
	24	24

Cette fois on cherche un MULTIPLE commun, et le plus PETIT : c'est le premier instant où les deux repassent en même temps. Multiples de 6 : 6, 12, 18, 24, 30... Multiples de 8 : 8, 16, 24, 32... Le premier qui figure dans les deux listes est 24. Ils se croiseront dans 24 minutes. ⚠ Ne pas confondre avec les lots ! Là on cherchait un diviseur commun, le plus grand ; ici un multiple commun, le plus petit. Le mot « commun » est le même, tout le reste est inverse.

Pièges à éviter : Multiples, diviseurs et division euclidienne

Échanger « multiple » et « diviseur ». Le multiple est toujours le PLUS GRAND des deux.

Croire qu'un nombre divisible par 3 l'est par 9. 6 est divisible par 3 et pas par 9.

Appliquer la somme des chiffres à 2, 5 ou 10. Ces trois critères ne regardent que le chiffre des unités.

Se contenter de l'égalité dans une division euclidienne. Le reste doit AUSSI être plus petit que le diviseur.

Chercher les diviseurs au hasard. La recherche par paires est la seule qui garantisse de n'en oublier aucun.

Confondre le problème des lots et celui des rendez-vous. Diviseur commun le plus grand d'un côté, multiple commun le plus petit de l'autre.

Dire d'un nombre qu'il est « presque divisible ». Le reste vaut zéro, ou il ne vaut pas zéro.

À retenir : Multiples, diviseurs et division euclidienne

« a est un multiple de b » et « b est un diviseur de a » disent la même chose : le multiple est le plus grand.

Divisible par 2, 5 ou 10 : on ne regarde que le chiffre des unités.

Divisible par 3 ou 9 : on regarde la somme des chiffres.

Tout multiple de 9 est un multiple de 3 — l'inverse est faux.

Division euclidienne : $a = b \times q + r$ AVEC $0 \leq r < b$. Les deux conditions comptent.

C'est la condition sur le reste qui rend le quotient et le reste uniques.

On cherche les diviseurs PAR PAIRES, en partant de 1, jusqu'à ce qu'elles se croisent.

Faire des lots : un DIVISEUR commun, le plus GRAND. Se recroiser : un MULTIPLE commun, le plus PETIT.

Exercices corrigés : Multiples, diviseurs et division euclidienne

1. 56 est-il un multiple de 7 ? Et 7 est-il un diviseur de 56 ?

Correction :

Oui aux deux : $56 = 7 \times 8$. Ce sont deux façons de dire la même chose.

2. 94 est-il un multiple de 6 ?

Correction :

Non : $94 \div 6$ donne 15 et il reste 4. Le reste n'est pas nul.

3. Le nombre 3 640 est-il divisible par 2, par 5, par 10 ?

Correction :

Il se termine par 0, donc il est divisible par les trois. ★ C'est le seul chiffre des unités pour lequel les trois critères tombent ensemble.

4. Le nombre 4 275 est-il divisible par 3 ? Par 9 ?

Correction :

$4 + 2 + 7 + 5 = 18$. Or 18 est divisible par 3 et par 9, donc 4 275 l'est aussi.

5. Quel chiffre faut-il mettre à la place du ? dans 47? pour que le nombre soit divisible par 9 ?

Correction :

$4 + 7 = 11$. Le prochain multiple de 9 est 18, donc il faut ajouter 7. Le nombre est 477.

6. Effectue la division euclidienne de 173 par 8 : quotient et reste.

Correction :

$8 \times 21 = 168$, et $173 - 168 = 5$. Donc $173 = 8 \times 21 + 5$, avec $5 < 8$.

7. Un élève écrit $95 = 7 \times 12 + 11$. L'égalité tombe-t-elle ? La division est-elle correcte ?

Correction :

L'égalité tombe : $84 + 11 = 95$. Mais la division est fausse, car $11 > 7$. La bonne écriture est $95 = 7 \times 13 + 4$.

8. Liste tous les diviseurs de 40.

Correction :

Par paires : 1×40 , 2×20 , 4×10 , 5×8 . Les diviseurs sont donc 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40 — huit en tout.

9. Un club a 24 maillots et 30 ballons. Il veut faire des lots identiques sans rien laisser. Combien de lots au maximum ?

Correction :

Les diviseurs communs à 24 et 30 sont 1, 2, 3 et 6. Le plus grand vaut 6 : on peut faire 6 lots, de 4 maillots et 5 ballons chacun.

10. Deux phares clignotent, l'un toutes les 9 secondes, l'autre toutes les 12. Ils viennent de clignoter ensemble. Dans combien de secondes recommenceront-ils ?

Correction :

On cherche le plus petit multiple commun. Multiples de 9 : 9, 18, 27, 36... Multiples de 12 : 12, 24, 36...
Le premier commun est 36 secondes.