

Multiples, diviseurs et facteurs premiers

cours et exercices corrigés de maths 3e

En quatrième, on savait dire si 6 divise 42. En troisième, on va plus loin : on DÉMONTE le nombre. $42 = 2 \times 3 \times 7$, et cette écriture-là contient tous ses diviseurs à la fois. C'est elle qui permet de trouver un PGCD, de rendre une fraction irréductible, ou de répartir des bonbons en sachets identiques sans en laisser un seul.

CE QUI EST NEUF EN 3E

La décomposition en facteurs premiers, et le PGCD

DÉJÀ VU EN 4E

Multiples, diviseurs, critères, nombres premiers jusqu'à 30

L'IDÉE CLÉ

Un entier se démonte en briques premières, d'une seule façon

À quoi ça sert : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

Répartir sans reste, c'est un problème de PGCD, et il se pose partout : constituer des équipes identiques avec 24 filles et 36 garçons, découper un terrain rectangulaire en parcelles carrées les plus grandes possibles, ranger une récolte de letchis en cagettes égales. En informatique, la décomposition en facteurs premiers est la base du chiffrement RSA qui protège les paiements en ligne : multiplier deux grands nombres premiers est instantané, retrouver les deux facteurs à partir du produit demande des siècles de calcul. Toute la sécurité tient dans cet écart.

Un peu d'histoire : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

Euclide démontre vers -300, dans les Éléments, qu'il existe une INFINITÉ de nombres premiers — une des plus belles preuves des mathématiques, et elle tient en trois lignes. Il y donne aussi l'algorithme qui porte son nom pour calculer un PGCD par divisions successives. Ératosthène, un siècle plus tard, invente le crible qui trouve tous les premiers jusqu'à un nombre donné en rayant les multiples. Vingt-trois siècles plus tard, on cherche encore de nouveaux nombres premiers : le plus grand connu compte plus de 41 millions de chiffres.

Définition : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

Un entier a est un **MULTIPLE** de b si $a = b \times k$ pour un entier k ; on dit alors que b est un **DIVISEUR** de a . Un **NOMBRE PREMIER** est un entier qui possède exactement **DEUX** diviseurs : 1

et lui-même. ★ Tout entier supérieur à 1 s'écrit d'une SEULE façon comme un produit de nombres premiers : c'est sa DÉCOMPOSITION EN FACTEURS PREMIERS. ⚠ 1 n'est pas premier — il n'a qu'un seul diviseur, pas deux.

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

42 cases rangées en 6×7 : 6 et 7 divisent 42

Un diviseur, c'est un côté possible. Les 42 cases se rangent en 6 lignes de 7 : 6 et 7 divisent donc 42, et 42 est leur multiple. On pourrait aussi les ranger en 2×21 , en 3×14 , ou en 1×42 — chaque rangement possible désigne un diviseur, et il n'y en a pas d'autres.

Propriétés : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

Rappel de 4e : les critères de divisibilité

Ils évitent de poser la division. Par 2 : le chiffre des unités est pair. Par 5 : il finit par 0 ou 5. Par 10 : par 0. Par 3 : la SOMME des chiffres est divisible par 3. Par 9 : la somme des chiffres est divisible par 9. ★ Pour 738 : $7 + 3 + 8 = 18$, divisible par 3 — et par 9 aussi.

nombre	divisible par
135	3 et 5
250	2, 5 et 10
738	2, 3 et 9
123	3, mais pas 9

$1 + 2 + 3 = 6$: divisible par 3, pas par 9

Un nombre premier ne fait qu'un seul rectangle

7 a exactement deux diviseurs, 1 et 7 : il est PREMIER. 21, lui, vaut 3×7 : il en a quatre, donc il ne l'est pas. ★ Les premiers jusqu'à 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. ⚠ 2 est le SEUL premier pair — tout autre nombre pair est divisible par 2 en plus de 1 et lui-même.

1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---

7 cases : aucun autre rangement que 1×7

Décomposer, c'est démonter jusqu'aux briques

On divise par le plus petit premier possible, encore et encore, jusqu'à obtenir 1. Pour 60 : par 2 il reste 30, par 2 il reste 15, par 3 il reste 5, par 5 il reste 1. Donc $60 = 2^2 \times 3 \times 5$. ⚠ 2×15 n'est PAS une décomposition en facteurs premiers : 15 n'est pas premier, il faut continuer.

on divise	par
60	2
30	2
15	3
5	5
1	fini

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$

La décomposition est UNIQUE

Peu importe par où l'on commence, on aboutit toujours au même produit. 12 donne $2^2 \times 3$, que l'on parte de 2×6 ou de 3×4 . ★
C'est ce qui rend la décomposition utile : elle est la carte d'identité du nombre, et deux entiers différents n'ont jamais la même.

on part de	on arrive à
2×6	$2 \times 2 \times 3$
3×4	$3 \times 2 \times 2$
12×1	$2^2 \times 3$

trois chemins, un seul résultat

Le PGCD se lit dans les facteurs communs

Le PGCD de deux entiers est leur plus grand diviseur commun. On décompose les deux, puis on garde les facteurs PRÉSENTS DANS LES DEUX, chacun à sa plus petite puissance. $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$: en commun, un 2 et un 3, donc $\text{PGCD} = 6$. ★ Et 6 est bien le plus grand nombre qui divise à la fois 12 et 18.

nombre	décomposition
12	$2 \times 2 \times 3$
18	$2 \times 3 \times 3$
commun	$2 \times 3 = 6$

un 2 et un 3 dans les deux :
 $\text{PGCD} = 6$

La formule : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

LE PGCD À PARTIR DES DÉCOMPOSITIONS

$\text{PGCD} =$
produit des facteurs communs

Chaque facteur commun est pris à sa plus petite puissance. $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$ donnent $2 \times 3 = 6$.

facteur	dans 12	dans 18	on garde
2	2 fois	1 fois	1 fois
3	1 fois	2 fois	1 fois

la plus petite des deux, à chaque fois

$$2 \times 3 = 6$$

Méthode : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

1. Décomposer : toujours par le plus petit premier

On essaie 2, puis 3, puis 5, puis 7 ... On ne passe au suivant que lorsque le précédent ne divise plus. Cette discipline évite d'oublier un facteur, et donne toujours le même résultat.

2. Savoir quand s'arrêter de chercher un diviseur

Pour tester si n est premier, il suffit d'essayer les premiers dont le carré ne dépasse pas n . Pour $97 : 2, 3, 5, 7$ suffisent, car $11^2 = 121 > 97$. Aucun ne divise, donc 97 est premier.

3. PGCD : décomposer les deux, puis intersecter

On écrit les deux décompositions l'une sous l'autre, on entoure ce qui est dans LES DEUX, et on multiplie. ⚠ On garde la plus PETITE puissance : un facteur présent deux fois d'un côté et une fois de l'autre n'est commun qu'une fois.

4. Rendre une fraction irréductible

On divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD, et c'est fini en une étape. $\frac{24}{36} : le$ PGCD vaut 12, donc la fraction irréductible est $\frac{2}{3}$. Simplifier par un diviseur plus petit marche aussi, mais il faut alors recommencer.

Selon ce que l'on cherche : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

Faire des parts identiques sans reste

Le plus grand nombre de parts identiques que l'on peut former avec deux quantités est leur PGCD. C'est le problème des sachets, des équipes, des bouquets.

Simplifier une fraction d'un seul coup

Diviser haut et bas par le PGCD donne directement la forme irréductible, sans tâtonner.

Reconnaître un nombre premier

Un entier qui résiste à tous les premiers dont le carré ne le dépasse pas est premier. C'est le test complet, et il est court.

Exemples corrigés : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

Décomposer 45

On veut écrire 45 comme un produit de nombres premiers.

Les sachets de bonbons

On veut faire des sachets identiques avec 24 bonbons et 36 biscuits, sans qu'il reste rien.

Quelle est sa décomposition ?

on divise	par
45	3
15	3
5	5
1	fini

$$45 = 3^2 \times 5$$

45 n'est pas pair, donc 2 ne marche pas. Sa somme de chiffres vaut $4 + 5 = 9$, divisible par 3 : $45 \div 3 = 15$. Puis $15 \div 3 = 5$, et 5 est premier. On obtient $45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$. Contrôle : $9 \times 5 = 45$. ⚠️ 5×9 n'est pas une réponse valable — 9 n'est pas premier.

Quel est le plus grand nombre de sachets possible ?

nombre	décomposition
24	$2 \times 2 \times 2 \times 3$
36	$2 \times 2 \times 3 \times 3$
commun	$2 \times 2 \times 3 = 12$

$$\text{PGCD}(24; 36) = 12$$

Chaque sachet doit recevoir le même nombre de bonbons et le même nombre de biscuits : le nombre de sachets doit donc diviser 24 ET 36. On cherche le plus grand : c'est le PGCD. $24 = 2^3 \times 3$ et $36 = 2^2 \times 3^2$. En commun : 2^2 et 3, soit $4 \times 3 = 12$. On peut faire 12 sachets, avec 2 bonbons et 3 biscuits dans chacun. Contrôle : $12 \times 2 = 24$ et $12 \times 3 = 36$.

97 est-il premier ?

On veut savoir si 97 est un nombre premier.

Comment le prouver sans tout essayer ?

on essaie	son carré	verdict
2	4	ne divise pas
3	9	ne divise pas
5	25	ne divise pas
7	49	ne divise pas
11	$121 > 97$	on s'arrête

dès que le carré dépasse, c'est fini

Il suffit de tester les nombres premiers dont le carré ne dépasse pas 97 : 2 (4), 3 (9), 5 (25), 7 (49). Le suivant serait 11, mais $11^2 = 121 > 97$: inutile d'aller plus loin. 97 est impair, sa somme de chiffres vaut 16 (non divisible par 3), il ne finit ni par 0 ni par 5, et $97 \div 7 \approx 13,9$ ne tombe pas juste. Aucun

diviseur : 97 est premier. ★ Quatre essais ont suffi, au lieu de quatre-vingt-quinze.

Pièges à éviter : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

Croire que 1 est premier. Il n'a qu'UN diviseur, et la définition en exige exactement deux. Le laisser entrer casserait l'unicité de la décomposition.

Écrire $30 = 2 \times 15$ et s'arrêter là. 15 n'est pas premier : la décomposition n'est finie que lorsque TOUS les facteurs le sont — ici $2 \times 3 \times 5$.

Prendre la plus GRANDE puissance pour le PGCD. Avec $12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$, le 2 n'est commun qu'une fois : le PGCD vaut 6, pas 36 (qui est le PPCM).

Confondre multiple et diviseur. 42 est un multiple de 6 ; 6 est un diviseur de 42. Le multiple est le grand, le diviseur est le petit.

Tester tous les nombres jusqu'à n pour savoir si n est premier. On s'arrête dès que le carré du candidat dépasse n — au-delà, le complément aurait déjà été trouvé.

À retenir : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

b divise a si $a = b \times k$: b est le diviseur, a est le multiple.

Un nombre premier a exactement DEUX diviseurs. 1 n'est pas premier, 2 est le seul premier pair.

Tout entier supérieur à 1 se décompose d'une SEULE façon en produit de facteurs premiers.

PGCD : on garde les facteurs communs, chacun à sa plus PETITE puissance.

Diviser numérateur et dénominateur par leur PGCD rend une fraction irréductible en une étape.

Exercices corrigés : Multiples, diviseurs et facteurs premiers

1. 5 est-il un diviseur de 35 ?

Correction :

Oui : $35 = 5 \times 7$. Le quotient 7 est entier, donc 5 divise 35, et 35 est un multiple de 5.

2. Parmi 5, 6, 8 et 10, lequel est un diviseur de 42 ?

Correction :

6, car $42 = 6 \times 7$. Les autres laissent un reste : $42 \div 5 = 8,4$; $42 \div 8 = 5,25$; $42 \div 10 = 4,2$.

3. Le nombre 135 est-il divisible par 3 ?

Correction :

Oui. $1 + 3 + 5 = 9$, et 9 est divisible par 3. Donc 135 l'est aussi : $135 = 3 \times 45$.

4. 123 est-il divisible par 9 ?

Correction :

Non. $1 + 2 + 3 = 6$, qui est divisible par 3 mais pas par 9. Donc 123 est divisible par 3, pas par 9.

5. Parmi 9, 15, 17 et 21, lequel est premier ?

Correction :

17. Les autres se décomposent : $9 = 3 \times 3$, $15 = 3 \times 5$, $21 = 3 \times 7$. Chacun a donc plus de deux diviseurs.

6. Pourquoi 21 n'est-il pas premier ?

Correction :

Parce que $21 = 3 \times 7$. Il a quatre diviseurs — 1, 3, 7 et 21 — alors qu'un nombre premier n'en a que deux.

7. Décomposer 12 en produit de facteurs premiers.

Correction :

$12 \div 2 = 6$, $6 \div 2 = 3$, et 3 est premier. Donc $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$. ⚠ Ni 2×6 ni 3×4 ne conviennent : 6 et 4 ne sont pas premiers.

8. Un élève écrit : « 2×15 est la décomposition de 30 ». A-t-il raison ?

Correction :

Non. 15 n'est pas premier : il vaut 3×5 . La décomposition complète est $30 = 2 \times 3 \times 5$.

9. Quel est le PGCD de 12 et 18 ?

Correction :

$12 = 2^2 \times 3$ et $18 = 2 \times 3^2$. Les facteurs communs, à leur plus petite puissance, sont 2 et 3 : le PGCD vaut 6. On vérifie : 6 divise bien 12 ($= 6 \times 2$) et 18 ($= 6 \times 3$), et aucun nombre plus grand ne le fait.

10. Pourquoi un nombre pair supérieur à 2 n'est-il jamais premier ?

Correction :

Parce qu'il est divisible par 2, en plus de 1 et de lui-même : il a donc au moins trois diviseurs. Seul 2 échappe à la règle, puisque pour lui le diviseur 2 EST le nombre lui-même.