

Les nombres rationnels

cours et exercices corrigés de maths 3e

Depuis la sixième, les entiers, les décimaux et les fractions ressemblent à trois familles séparées. La troisième révèle qu'il n'y en a qu'une : 5, 0,25 et $\frac{3}{4}$ s'écrivent tous sous la forme $\frac{a}{b}$, et portent donc le même nom — nombres rationnels. Cette unification n'est pas qu'un mot : elle permet de les poser tous sur la même droite, et de découvrir qu'entre deux d'entre eux, aussi proches soient-ils, il s'en cache toujours un autre.

LA FORME

$\frac{a}{b}$ avec a et b entiers, et $b \neq 0$

QUI EN FAIT PARTIE

Tous les entiers, tous les décimaux, toutes les fractions

LE PIÈGE

$-\frac{3}{4}$ est plus PETIT que $-\frac{1}{2}$

À quoi ça sert : les nombres rationnels

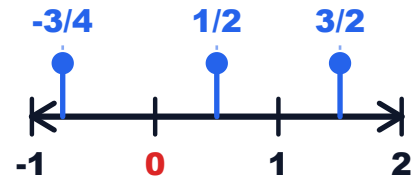
Un rationnel apparaît chaque fois qu'on partage sans que cela tombe juste : trois pizzas pour quatre personnes, un trajet fait aux deux tiers, une remise d'un cinquième. Mais l'usage le moins visible est le plus massif — un ordinateur ne manipule QUE des rationnels. Ses nombres à virgule sont des fractions dont le dénominateur est une puissance de deux, et c'est précisément pour cela que $0,1 + 0,2$ n'y donne pas exactement $0,3$: un dixième ne s'écrit pas exactement avec un dénominateur en puissance de deux. La densité, elle, sert tous les jours sans qu'on la nomme : dire qu'un prix est « entre 12 et 13 euros » n'exclut rien, puisqu'il reste une infinité de possibilités.

Un peu d'histoire : les nombres rationnels

Les pythagoriciens, au VI^e siècle avant notre ère, tenaient pour acquis que tout nombre était rationnel : deux longueurs quelconques devaient toujours être dans un rapport de nombres entiers. La découverte que la diagonale d'un carré de côté 1 — c'est-à-dire $\sqrt{2}$ — ne peut PAS s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ a donc été une crise, et pas seulement une curiosité : elle ruinait le principe même de leur philosophie, selon lequel le nombre entier explique le monde. La légende veut que celui qui divulgua la démonstration ait été noyé. Elle est probablement fausse, mais elle dit bien ce que la découverte avait de dérangeant — et c'est de là que vient le mot « irrationnel », qui signifiait « sans rapport » avant de signifier « déraisonnable ».

Définition : les nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers relatifs et où b n'est pas nul. La condition $b \neq 0$ n'est pas une précaution d'écriture : une division par zéro n'a aucun sens, donc une telle écriture ne désigne aucun nombre. Un même rationnel possède une infinité d'écritures — $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{75}{100}$ — mais une seule forme irréductible, celle où le numérateur et le dénominateur n'ont plus de diviseur commun.



Négatifs, positifs, entiers ou non : tous les rationnels vivent sur la même droite, et s'y comparent comme n'importe quels nombres.

Propriétés : les nombres rationnels

Une seule famille, trois écritures

Tout entier est rationnel, car $5 = \frac{5}{1}$.

Tout décimal l'est aussi, car

$$0,25 = \frac{25}{100}, \text{ et } -2,5 = \frac{-5}{2}. \text{ Il}$$

n'existe donc pas trois sortes de

nombres à opposer : il y a une

seule famille, et les écritures

décimale et fractionnaire en sont

deux vues. La question « ce

nombre est-il rationnel ? » revient à

demander si l'on peut l'écrire

comme un quotient de deux entiers.

nombre	sous forme a/b	rationnel
5	5/1	oui
0,25	25/100	oui
-2,5	-5/2	oui

trois écritures, une famille

La forme $\frac{a}{b}$ est le critère : si on peut l'écrire ainsi, c'est un rationnel.

Passer d'une écriture à l'autre

D'une fraction vers un décimal, on

$$\text{divise : } \frac{3}{4} = 3 \div 4 = 0,75. \text{ En}$$

sens inverse, on lit le dernier rang

décimal — 0,4 se lit « quatre

dixièmes », donc $\frac{4}{10}$, que l'on

simplifie en $\frac{2}{5}$. Toute cette

manœuvre suppose que la division

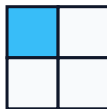
tombe juste ; ce n'est pas toujours

le cas, et $\frac{1}{3}$ donne 0,333... sans

jamais s'arrêter — le nombre reste

rationnel, c'est son écriture

décimale qui est infinie.



1/4

Une case sur quatre : c'est $\frac{1}{4}$, et c'est aussi 0,25.

Comparer : ramener au même dénominateur

Deux fractions de même

dénominateur se comparent par

leurs numérateurs : $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$. Sinon,

on les ramène au même

dénominateur. Pour $\frac{3}{4}$ et $\frac{2}{3}$, on

prend 12 : cela donne $\frac{9}{12}$ et $\frac{8}{12}$,

donc $\frac{3}{4}$ est la plus grande. Une

autre voie, souvent plus rapide,

consiste à passer les deux en

écriture décimale.



3/4

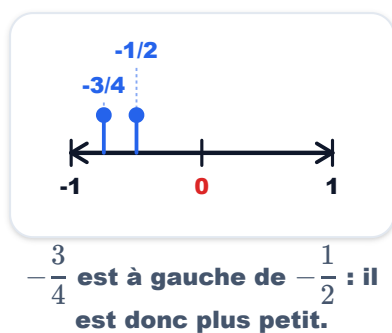


2/3

Les deux barres se lisent d'un coup : $\frac{3}{4}$ dépasse $\frac{2}{3}$.

Chez les négatifs, tout s'inverse

C'est le piège du chapitre. Entre $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{2}$, le plus petit est $-\frac{3}{4}$ — alors que $\frac{3}{4}$ est le plus GRAND des deux positifs. La raison se voit sur la droite graduée : plus on s'éloigne de zéro vers la gauche, plus le nombre est petit. Comparer deux négatifs, c'est donc comparer leurs distances à zéro, puis inverser la conclusion.



Additionner : le dénominateur d'abord

On n'additionne des fractions que si elles ont le même dénominateur, et l'on ajoute alors les numérateurs seulement : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Sinon, il faut d'abord les mettre au même dénominateur : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Additionner les dénominateurs entre eux ne veut rien dire — c'est pourtant l'erreur la plus fréquente.

calcul	juste ?
$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3}{3}$	oui
$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$	non
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	non : ça fait 1

on n'ajoute jamais les dénominateurs

Deux demis font un tout : si le résultat vaut $\frac{2}{4}$, quelque chose ne va pas.

Multiplier : bien plus simple qu'additionner

Pour un produit, aucun dénominateur commun n'est nécessaire : on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$, que l'on simplifie en $\frac{3}{10}$. Il est même conseillé de simplifier AVANT de multiplier : dans $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}$, le 3 du haut et le 3 du bas se simplifient, et il reste $\frac{2}{5}$ sans aucun calcul.

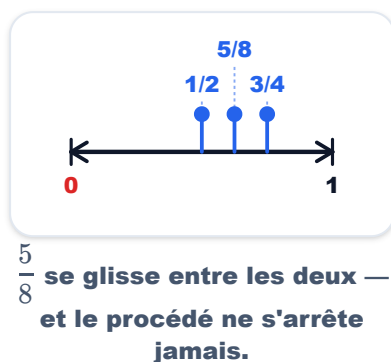
opération	ce qu'il faut
addition	le même dénominateur
multiplication	rien du tout

le produit est le cas facile

C'est la seule opération où les dénominateurs se traitent comme les numérateurs.

Entre deux rationnels, il y en a toujours un autre

Choisissez deux rationnels aussi proches que vous voulez : il en existe toujours un strictement compris entre les deux. La démonstration est immédiate, car leur MOYENNE en est un — elle se calcule à partir des deux, donc elle s'écrit encore sous la forme $\frac{a}{b}$.
Entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, la moyenne vaut $\frac{5}{8}$.
Et l'on peut recommencer indéfiniment : les rationnels ne sont jamais côte à côte sur la droite, contrairement aux entiers.



La formule : les nombres rationnels

**TROUVER UN RATIONNEL
STRICTEMENT COMPRIS ENTRE DEUX
AUTRES**

$$\frac{a + b}{2}$$

La moyenne de deux nombres est toujours située entre eux, et elle reste rationnelle puisqu'on ne l'obtient qu'en additionnant et en divisant. C'est la réponse **CONSTRUCTIVE** à la question « en existe-t-il un entre les deux ? » : non seulement oui, mais en voici un.

entre	et	la moyenne
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{16}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{17}{32}$

et cela ne s'arrête jamais

À chaque tour, on se rapproche sans jamais atteindre : il reste toujours de la place.

Méthode : les nombres rationnels

1. Pour savoir si un nombre est rationnel

On cherche à l'écrire comme un quotient de deux entiers. Un entier se met sur 1, un décimal sur une puissance de dix. Si l'on y parvient, c'est un rationnel — et c'est le cas de tous les nombres rencontrés au collège, à l'exception des racines carrées qui ne tombent pas juste.

2. Pour comparer, choisir sa route

Deux voies existent : le même dénominateur, ou l'écriture décimale. La seconde est souvent plus rapide quand les dénominateurs n'ont pas de multiple commun évident. ➖ Et si les nombres sont négatifs, on compare leurs distances à zéro PUIS on inverse la conclusion.

3. Avant d'additionner, regarder les dénominateurs

S'ils sont égaux, on additionne les numérateurs et on ne touche pas au dénominateur. S'ils diffèrent, on cherche un dénominateur commun avant tout calcul. Aucun raccourci n'existe ici, contrairement à la multiplication.

4. Simplifier avant de multiplier

Un facteur présent en haut et en bas se supprime des deux côtés, même s'il vient de fractions différentes. Cela évite de manipuler de grands nombres et donne directement la forme irréductible.

5. Pour trouver un nombre entre deux autres

On prend la moyenne. Elle est toujours strictement comprise entre les deux, et toujours rationnelle. Il n'existe aucune situation où l'on doive répondre « il n'y en a pas ».

Selon ce que l'on cherche : les nombres rationnels

On me demande si un nombre est rationnel

Je tente de l'écrire $\frac{a}{b}$ avec deux entiers. Un entier, un décimal, une fraction : la réponse est oui dans les trois cas.

On me demande une écriture décimale

Je divise le numérateur par le dénominateur.

On me demande de comparer

Même dénominateur, ou écriture décimale. Et si les nombres sont négatifs, j'inverse la conclusion à la fin.

On me demande une somme ou un produit

Pour une somme, dénominateur commun d'abord. Pour un produit, je multiplie tout droit — en simplifiant avant si je peux.

On me demande un nombre entre deux autres

Je calcule leur moyenne : elle convient toujours.

Exemples corrigés : les nombres rationnels

Un décimal déguisé

Le nombre 0,4.

Montrer qu'il est rationnel, et l'écrire sous forme irréductible.

Le dernier chiffre est au rang des dixièmes, donc

$0,4 = \frac{4}{10}$: c'est déjà un quotient de deux entiers, ce qui prouve qu'il est rationnel. Il reste à simplifier : 4 et 10 ont 2 pour diviseur commun, donc $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Comme 2 et 5 n'ont plus de diviseur commun, la forme est irréductible. Contrôle : $2 \div 5 = 0,4$.

Une somme, et l'erreur à ne pas commettre

Le calcul $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Combien vaut cette somme ?

étape	écriture
départ	$1/2 + 1/3$
au même dénom.	$3/6 + 2/6$
résultat	$5/6$

6 est multiple de 2 et de 3

Seuls les numérateurs s'ajoutent ; le dénominateur commun reste tel quel.

Les dénominateurs diffèrent : il faut d'abord un dénominateur commun, et 6 convient puisqu'il est

multiple de 2 et de 3. On obtient $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Répondre $\frac{2}{5}$ serait faux, et un simple ordre de

grandeur le montre : $\frac{1}{2}$ vaut déjà 0,5, donc la somme

dépasse forcément 0,5, alors que $\frac{2}{5}$ vaut 0,4. Un

résultat plus petit que l'un de ses termes ne peut pas être juste.

Deux négatifs

Les nombres $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Quel est le plus petit ?

Aucun calcul n'est nécessaire ici : un nombre négatif est toujours plus petit qu'un nombre positif. Le plus petit est donc $-\frac{1}{2}$. La question devient réellement délicate quand les DEUX sont négatifs : entre $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{2}$, c'est $-\frac{3}{4}$ le plus petit, parce qu'il est plus loin de zéro du côté gauche — l'inverse de ce qui se passe chez les positifs.

Se glisser entre deux nombres

Les nombres $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$.

Trouver un rationnel strictement compris entre les deux.

On prend leur moyenne. La somme vaut $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$, et l'on divise par 2, ce qui donne $\frac{5}{8}$.
Vérification en décimal : $0,5 < 0,625 < 0,75$. C'est bien entre les deux. Et l'on pourrait recommencer entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{8}$, puis encore, sans fin — c'est ce qu'on appelle la densité des rationnels, et c'est ce qui les distingue radicalement des entiers, entre lesquels il n'y a parfois rien.

Pièges à éviter : les nombres rationnels

Écrire $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Les dénominateurs ne s'additionnent jamais : il faut un dénominateur commun, et le résultat est $\frac{5}{6}$.

Écrire $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Deux demis font un tout, donc 1 — et non un demi.

Croire que $-\frac{3}{4}$ est plus grand que $-\frac{1}{2}$ parce que 3 est plus grand que 1. Chez les négatifs, la conclusion s'inverse.

Croire qu'un entier n'est pas rationnel. Tout entier s'écrit sur 1 : $5 = \frac{5}{1}$.

Croire qu'entre deux rationnels proches il n'y a rien. Leur moyenne s'y trouve toujours, et le procédé se répète sans fin.

Oublier la condition $b \neq 0$: une écriture avec zéro au dénominateur ne désigne aucun nombre.

Confondre « écriture décimale infinie » et « non rationnel » : $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ reste parfaitement rationnel.

À retenir : les nombres rationnels

Un rationnel s'écrit $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers et $b \neq 0$.

Entiers, décimaux et fractions sont tous rationnels : une seule famille.

Un même rationnel a une infinité d'écritures, mais une seule forme irréductible.

Pour additionner, il faut le même dénominateur ; pour multiplier, rien.

Chez les négatifs, le plus éloigné de zéro est le plus PETIT.

Entre deux rationnels, il y en a toujours un autre : leur moyenne.

Exercices corrigés : les nombres rationnels

1. Le nombre entier 5 est-il rationnel ? Justifier.

Correction :

Oui : $5 = \frac{5}{1}$, quotient de deux entiers dont le second n'est pas nul. Tout entier est rationnel.

2. Dans l'écriture $\frac{a}{b}$ d'un nombre rationnel, quelle condition porte sur b ?

Correction :

b doit être différent de zéro. Une division par zéro n'a pas de sens : l'écriture ne désignerait aucun nombre.

3. Donner l'écriture décimale de $\frac{3}{4}$.

Correction :

On divise : $3 \div 4 = 0,75$.

4. Expliquer pourquoi $0,4 = \frac{2}{5}$.

Correction :

Le 4 est au rang des dixièmes, donc $0,4 = \frac{4}{10}$. En simplifiant par 2, on obtient $\frac{2}{5}$. Contrôle : $2 \div 5 = 0,4$.

5. Quel est le plus grand : $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$?

Correction :

On ramène au dénominateur 12 : $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$. Donc $\frac{3}{4}$ est le plus grand. En décimal : $0,666 \dots$ contre $0,75$.

6. Expliquer pourquoi $-\frac{3}{4}$ est plus petit que $-\frac{1}{2}$.

Correction :

$\frac{3}{4}$ est plus loin de zéro que $\frac{1}{2}$. Du côté négatif, être plus loin de zéro signifie être plus à gauche sur la droite graduée, donc plus petit. En décimal : $-0,75 < -0,5$.

7. Calculer $\frac{5}{8} - \frac{2}{8}$.

Correction :

Les dénominateurs sont égaux : on soustrait les numérateurs et on garde le 8. Résultat : $\frac{3}{8}$.

8. Calculer $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$.

Correction :

On multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux : $\frac{6}{20}$, qui se simplifie par 2 en $\frac{3}{10}$.

9. Quelle est la forme irréductible de $\frac{6}{8}$?

Correction :

6 et 8 ont 2 pour diviseur commun : $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Comme 3 et 4 n'ont plus de diviseur commun, la fraction est irréductible.

10. Un élève affirme : « entre deux nombres rationnels, il n'y a aucun autre nombre rationnel ». A-t-il raison ?

Correction :

Non. Leur moyenne est toujours strictement comprise entre les deux, et elle reste rationnelle. Entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$, par exemple, se trouve $\frac{5}{8}$ — et l'on peut recommencer indéfiniment.