

Les opérations sur les nombres relatifs — cours de maths 4e

En 5e, on a appris à additionner et à soustraire des nombres relatifs. La 4e ajoute les deux dernières opérations — multiplier et diviser — et avec elles une règle qui ne ressemble à rien de ce qu'on connaissait : deux nombres négatifs multipliés donnent un résultat positif.

LE SOCLE

Un signe, et une distance à zéro

LA NOUVEAUTÉ DE 4E

Multiplier et diviser des relatifs

LE RÉFLEXE

Décider le signe AVANT de calculer

À quoi ça sert : les opérations sur les nombres relatifs

Les relatifs servent partout où il existe un « avant » et un « après » zéro. À La Réunion, c'est l'altitude comptée depuis la mer — le fond du Trou de Fer contre le sommet du Piton des Neiges — et surtout la température : au sommet, il gèle plusieurs nuits par an, alors qu'il fait 28 °C sur le littoral au même moment. C'est aussi un solde bancaire, un score au jeu qu'on peut perdre, ou les étages d'un parking souterrain. La multiplication arrive dès qu'un même écart se répète : une descente de 3 °C par heure pendant 4 heures, c'est $(-3) \times 4$.

Un peu d'histoire : les opérations sur les nombres relatifs

Les nombres négatifs ont mis très longtemps à être acceptés. Les mathématiciens chinois les utilisaient déjà il y a deux mille ans, avec des baguettes rouges pour les positifs et noires pour les négatifs. En Europe, on les appelait encore « nombres absurdes » au XVIIe siècle, et Blaise Pascal jugeait impossible de retirer 4 de 0. C'est le commerce, avec ses dettes et ses avoirs, qui a fini par les imposer.

Définition : les opérations sur les nombres relatifs

Un nombre relatif est fait de deux informations : un signe, qui dit de quel côté de zéro il se trouve, et une distance à zéro, qui dit de combien il s'en éloigne. Deux nombres relatifs de même distance à zéro mais de signes contraires sont dits opposés :



-3 et +3 : même distance à zéro, signes contraires

ils sont symétriques par rapport à zéro sur la droite graduée.

Deux nombres opposés sont symétriques par rapport à zéro.

Propriétés : les opérations sur les nombres relatifs

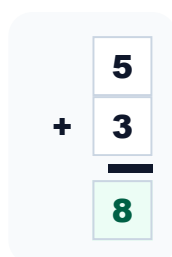
Additionner deux nombres de même signe

On additionne les distances à zéro et on garde le signe commun. Deux déplacements vers la gauche s'ajoutent : $(-5) + (-4) = -9$.



Soustraire, c'est ajouter l'opposé

Toute soustraction se réécrit en addition : on remplace le second nombre par son opposé. $5 - (-3)$ devient $5 + 3$, donc 8.



La règle des signes

Pour multiplier ou diviser, on décide d'abord le signe : identiques donnent +, différents donnent - . C'est la même table pour les deux opérations.

Données	$\times$ ou $\div$	+	-
	+	+	-
	-	-	+

deux signes identiques donnent +

Le signe se compte

Dans un produit de plusieurs facteurs, on compte les signes moins : un nombre pair de moins donne un résultat positif, un nombre impair un résultat négatif. $(-2) \times (-3) \times (-1)$ a trois moins, donc son résultat est négatif.

La formule : les opérations sur les nombres relatifs

POUR MULTIPLIER OU DIVISER DEUX NOMBRES RELATIFS

signe d'abord, puis les distances à zéro

Données	$\times$ ou $\div$	+	-
	+	+	-
	-	-	+

$(-4) \times 3$: signes différents, donc résultat négatif ; $4 \times 3 = 12$; donc $(-4) \times 3 = -12$.

deux signes identiques donnent +

Méthode : les opérations sur les nombres relatifs

1. Réécrire

S'il y a une soustraction, on la transforme d'abord en addition de l'opposé. On ne calcule jamais sur une expression qui mélange des « - » de signe et des « - » d'opération.

$$\begin{array}{r} 5 \\ + 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

$5 - (-3)$ devient $5 + 3$

2. Décider le signe

Pour un produit ou un quotient, on écrit le signe du résultat AVANT de calculer quoi que ce soit. Ensuite seulement, on multiplie ou on divise les distances à zéro, comme avec des nombres positifs.

Données	$\times$ ou $\div$	+	-
	+	+	-
	-	-	+

deux signes identiques donnent +

3. Ordonner

Dans un calcul mélangé, on suit toujours le même ordre : les parenthèses, puis les multiplications et les divisions, puis les additions et les soustractions. On réécrit le calcul entier à chaque étape.

Données	étape
	l'énoncé
	la multiplication
	l'addition

la multiplication passe avant l'addition

Selon ce que l'on cherche : les opérations sur les nombres relatifs

Additionner et soustraire

On transforme les soustractions en additions, puis on regroupe : les nombres de même signe s'additionnent, les autres se compensent.

Multiplier et diviser

On décide le signe avec la règle des signes, puis on calcule sur les distances à zéro. La division suit exactement la même table que la multiplication.

Résoudre un problème

On traduit l'énoncé en calcul : une hausse et une montée sont positives, une baisse et une descente sont négatives. Puis on calcule, et on répond avec l'unité.



de $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ à $+5\text{ }^{\circ}\text{C}$: une hausse de 7

Exemples corrigés : les opérations sur les nombres relatifs

Deux signes différents

On veut calculer $(-4) \times 3$.

Quel est le résultat ?

Données	$\times$ ou $\div$	+	-
	+	+	-
	-	-	+

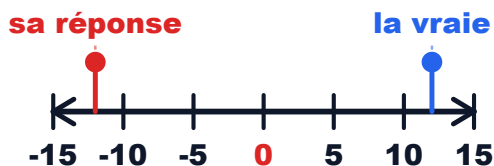
deux signes identiques donnent +

On décide le signe d'abord : les deux facteurs ont des signes différents, donc le résultat est négatif. On calcule ensuite avec les distances à zéro : $4 \times 3 = 12$. Le résultat est donc -12 . ⚠ On n'écrit jamais le calcul avant d'avoir décidé le signe : c'est là que les erreurs se produisent.

Deux signes identiques

Un élève affirme que $(-4) \times (-3) = -12$. On veut aussi calculer $(-20) \div (-5)$.

A-t-il raison, et que vaut le quotient ?

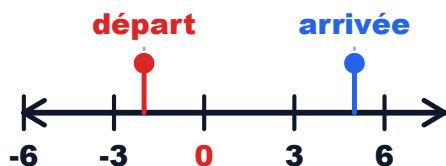


Il a tort. Les deux facteurs ont le MÊME signe, donc le résultat est positif : $(-4) \times (-3) = +12$. Il a confondu avec le cas des signes différents. Pour le quotient, c'est la même table : (-20) et (-5) ont le même signe, donc le résultat est positif, et $20 \div 5 = 4$. Donc $(-20) \div (-5) = 4$.

La température du matin

Il fait $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ au petit matin au sommet du Piton des Neiges. Dans la journée, la température augmente de $7\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Quelle est la température finale ?



$+7$ depuis -2 : on arrive à $+5$

Une augmentation se traduit par une addition d'un nombre positif : on calcule $(-2) + 7$. Les deux nombres ont des signes différents, donc on soustrait les distances à zéro et on garde le signe du plus éloigné de zéro : $7 - 2 = 5$, et 7 est positif. La température finale est donc de 5°C . Contrôle : on est bien passé au-dessus de zéro, ce qui est cohérent avec une hausse de 7°C depuis -2°C .

Pièges à éviter : les opérations sur les nombres relatifs

Changer le signe du premier nombre au lieu du second : dans $5 - (-3)$, c'est le -3 qui devient $+3$, jamais le 5.

Appliquer la règle des signes à une addition : elle ne vaut que pour la multiplication et la division. $(-5) + (-4)$ ne fait pas $+9$.

Calculer de gauche à droite sans regarder les opérations : dans $(-3) \times 4 + 5$, la multiplication passe d'abord, et le résultat est -7 , pas -27 .

À retenir : les opérations sur les nombres relatifs

Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé : $5 - (-3) = 5 + 3 = 8$. Seul le second nombre change de signe.

Pour multiplier ou diviser, on décide le signe d'abord, puis on calcule avec les distances à zéro. Deux signes identiques donnent $+$, deux signes différents donnent $-$.

Dans un calcul mélangé, les parenthèses passent en premier, puis la multiplication et la division, et enfin l'addition et la soustraction.

Exercices corrigés : les opérations sur les nombres relatifs

1. Calculer $(-5) + (-4)$, puis $6 - 9$.

Correction :

Pour $(-5) + (-4)$, les deux nombres ont le même signe : on additionne les distances à zéro, $5 + 4 = 9$, et on garde le signe moins. Le résultat est -9 . Pour $6 - 9$, on réécrit en $6 + (-9)$: les signes sont différents, donc $9 - 6 = 3$ et on garde le signe du plus éloigné de zéro, qui est -9 . Le résultat est -3 .

2. Calculer $(-5) \times (-2)$, puis $(-12) \div 3$.

Correction :

Pour $(-5) \times (-2)$, les deux signes sont identiques, donc le résultat est positif : $5 \times 2 = 10$, donc le résultat est 10. Pour $(-12) \div 3$, les signes sont différents, donc le résultat est négatif : $12 \div 3 = 4$, donc le résultat est -4.

3. Calculer $(-3) \times 4 + 5$.

Correction :

La multiplication passe avant l'addition. On calcule d'abord $(-3) \times 4$: signes différents, donc négatif, et $3 \times 4 = 12$, ce qui donne -12. Il reste $(-12) + 5$: signes différents, donc $12 - 5 = 7$ avec le signe du plus éloigné de zéro, soit -7. Le résultat est -7.

4. Quel est le signe de $(-2) \times (-3) \times (-1)$? Réponds sans calculer le produit.

Correction :

On compte les facteurs négatifs : il y en a trois, c'est un nombre impair, donc le résultat est négatif. On peut le vérifier en calculant par étapes : $(-2) \times (-3) = +6$, puis $6 \times (-1) = -6$. Le résultat est bien négatif.