

Ordres de grandeur et préfixes — cours de maths 4e

Un atome mesure un dix-milliardième de mètre, une clé USB stocke des milliards d'octets. Aucun de ces nombres ne se lit à voix haute, et pourtant il faut les comparer. Les puissances de dix leur donnent une échelle commune — et une fois cette échelle en main, on peut juger un résultat sans le recalculer.

LES SIX PRÉFIXES

nano, micro, milli · kilo, méga, giga — de trois en trois

UN ORDRE DE GRANDEUR

La puissance de dix la plus proche : le RANG, pas le chiffre

LE PIÈGE

« micro » vaut 10^{-6} , pas « très petit »

À quoi ça sert : Ordres de grandeur et préfixes

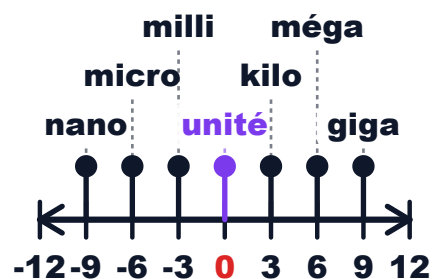
Les erreurs d'ordre de grandeur sont les plus coûteuses parce qu'elles ne ressemblent pas à des erreurs : le calcul est juste, seul le rang est faux. En pharmacie, confondre milligrammes et grammes multiplie une dose par mille, et c'est pour cela que les protocoles imposent de relire l'unité avant le nombre. Un abonnement internet annoncé en mégabits par seconde n'est pas le même service que le même nombre en mégaoctets — il y a un facteur huit entre les deux, et c'est ce qui permet d'annoncer un chiffre flatteur. Une clé USB de 32 gigaoctets contient $3,2 \times 10^{10}$ octets, soit quelques dizaines de milliers de photos : le savoir évite d'acheter dix fois trop, ou dix fois trop peu. À La Réunion, le raccordement à la fibre se compte en gigabits, la distance à Maurice en centaines de kilomètres, la population en centaines de milliers d'habitants — trois rangs différents qu'on manipule dans la même journée sans les confondre, à condition de les avoir situés une fois pour toutes.

Un peu d'histoire : Ordres de grandeur et préfixes

Les préfixes naissent avec le système métrique : la loi française du 18 germinal an III, en 1795, crée kilo, hecto et déca sur des racines grecques, milli, centi et déci sur des racines latines — le grec pour agrandir, le latin pour diviser, une règle qui tient encore. Micro et nano n'arrivent qu'en 1960, avec le Système international, quand la physique a besoin de descendre plus bas ; giga entre la même année, et les préfixes suivants — téra, péta — suivront l'informatique. L'ordre de grandeur, lui, est devenu une méthode de travail à part entière grâce à Enrico Fermi, qui demandait à ses étudiants d'estimer des quantités impossibles à mesurer — combien d'accordeurs de piano à Chicago — pour leur apprendre à raisonner sans données. En 1945, lors du premier essai atomique, il aurait estimé la puissance de l'explosion en lâchant des morceaux de papier et en mesurant de combien le souffle les avait déplacés. Son estimation, faite en quelques secondes, était du bon ordre de grandeur.

Définition : Ordres de grandeur et préfixes

L'ordre de grandeur d'un nombre est la puissance de dix la plus proche de ce nombre. Il ne dit pas la valeur exacte, il dit le RANG. La population de La Réunion change tous les ans ; son ordre de grandeur, 10^6 , ne change pas. ★ C'est ce qui le rend utile : il reste vrai des années, quand le nombre exact est faux dès le lendemain.



un axe d'EXPOSANTS : les préfixes s'y placent de trois en trois

Sur cet axe, on ne lit pas les nombres mais leurs puissances de dix. C'est la seule représentation où l'on voit d'un coup que « giga » est aussi loin de l'unité que « nano » — d'un côté un milliard, de l'autre un milliardième.

Propriétés : Ordres de grandeur et préfixes

Un préfixe est une puissance de dix écrite en un mot

Kilo veut dire mille, soit 10^3 . Milli veut dire un millième, soit 10^{-3} . Les six préfixes du programme vont de trois en trois : nano, micro, milli d'un côté, kilo, méga, giga de l'autre. ★ Écrire « 5 kilomètres », c'est écrire 5×10^3 mètres — le nombre devant ne change pas, seul le préfixe devient une puissance.

Données	préfixe	valeur
	nano	10^{-9}
	micro	10^{-6}
	milli	10^{-3}
	kilo	10^3
	méga	10^6
	giga	10^9

« Micro » ne veut pas dire « petit »

Dans la langue courante, micro veut dire « très petit » — microbe, microscope, micro-onde. En mathématiques et en sciences, il vaut EXACTEMENT 10^{-6} , un millionième, et rien d'autre. ⚠ C'est le piège de vocabulaire de la notion : les préfixes ne sont pas des mots d'ambiance, ce sont des nombres.

Données	le mot	en français
	micro	très
	méga	énorme
	giga	gigant

une valeur, pas une impression

Un ordre de grandeur donne le rang, pas le chiffre

On ne cherche pas la mesure exacte, on cherche la puissance de dix la plus proche. Un élève mesure de l'ordre de 10^0 mètre, soit 1 mètre ; l'altitude du Piton des Neiges est de l'ordre de 10^3 mètres. ★ Ces repères se retiennent comme des points d'appui : ils servent ensuite à juger tout le reste.

Données	objet	ordre de grandeur
	un atome	10^{-10} m
	une bactérie	10^{-6} m
	un élève	10^0 m
	le Piton des Neiges	10^3 m

de trois en trois, dans les deux sens

Données	objet	ordre
	la distance Terre-Lune	10^8

des repères, pas des résultats

Estimer : arrondir d'abord, multiplier ensuite

On remplace chaque nombre par la puissance de dix la plus proche, PUIS on calcule. ⚠ Faire le produit exact pour l'arrondir ensuite, c'est faire précisément le travail qu'on cherchait à éviter. Pour 480×21 : $480 \approx 10^2$ et $21 \approx 10^1$, donc le résultat est de l'ordre de 10^3 .

Données	le nombre	arrondi
	480	10^2
	21	10^1
	le produit	10^3

on arrondit, puis on multiplie

Multiplier ajoute les exposants, diviser les soustrait

C'est la règle qui rend l'estimation immédiate : $10^4 \times 10^3 = 10^7$, et $10^8 \div 10^3 = 10^5$. ⚠ L'erreur la plus courante est de MULTIPLIER les exposants — $10^4 \times 10^3$ ne fait pas 10^{12} . On les ajoute.

Données	opération	calcul
	multiplier	
	diviser	
	$10^4 \times 10^3$	

la règle qui fait tout le travail

Juger un résultat sans le refaire

On estime ce que le résultat DEVRAIT valoir, et on compare au rang de ce qui est annoncé. Un chat de 4 tonnes, une bactérie de 2 mm, une île de 90 millions d'habitants : ces réponses sont fausses sans qu'on ait rien recalculé. ★ Ce réflexe repère une erreur en trois secondes, et il sert bien au-delà des mathématiques.

Données	annoncé	vérifié
	un chat de 4 t	quelques kg
	une bactérie de 2 mm	quelques µm
	80 km de traversée	plus de 1000 km

le sens avant le calcul

La formule : Ordres de grandeur et préfixes

POUR ESTIMER UN PRODUIT OU UN QUOTIENT

$$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$$

$$\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$$

Données	calcul	ordre de grandeur
	480×21	$10^2 \times 10^1 = 10^3$
	$10^8 \div 10^3$	10^5
	9500×11	$10^4 \times 10^1 = 10^5$

$$10^{\{a\}} \div 10^{\{b\}} = 10^{\{a-b\}}$$

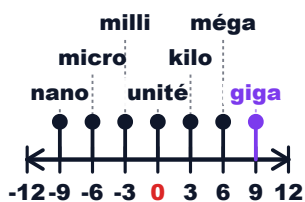
Toute l'estimation tient dans ces deux règles : une fois les nombres remplacés par des puissances de dix, il ne reste qu'à ajouter ou soustraire les exposants. C'est ce qui permet d'estimer de tête un calcul qu'on ne saurait pas poser.

arrondir, puis ajouter ou soustraire

Méthode : Ordres de grandeur et préfixes

1. Passer d'un préfixe à une puissance

On remplace le mot par sa puissance de dix, et on garde le nombre devant. « 7 nanomètres » devient 7×10^{-9} mètre. Pour comparer deux préfixes, on SOUSTRAIT leurs exposants : giga vaut 10^9 et milli vaut 10^{-3} , l'écart est de 12 rangs.



de milli à giga, l'écart des exposants vaut $9 - (-3) = 12$

2. Associer un ordre de grandeur à un objet

On ne calcule pas : on se raccroche à un repère connu. Un élève fait 10^0 mètre, une salle de classe 10^1 , une montagne 10^3 . On place l'objet par rapport à ces bornes, puis on compte les rangs. ⚠ Pour ranger des grandeurs, on range les EXPOSANTS — et un exposant négatif plus grand en valeur absolue donne un nombre plus PETIT.

Données	repère	ordre de grandeur
	un élève	10^0
	une salle	10^1
	une montagne	10^3

trois bornes, et on situe entre

3. Estimer un calcul

Trois gestes, dans cet ordre. On arrondit chaque nombre à la puissance de dix la plus proche. On ajoute les exposants pour un produit, on les soustrait pour un quotient. On lit le résultat comme un rang, pas comme une valeur exacte.

Données	étape	ce qu'on fait
	1	arrondir chaque nombre
	2	ajouter ou soustraire les exposants
	3	lire le résultat

jamais le produit exact d'abord

4. Juger un résultat annoncé

Deux contrôles, et l'un des deux suffit. Le contrôle du CALCUL : le

5. Retrouver le facteur perdu

Quand un résultat est faux, on ne recommence pas le calcul : on

résultat a-t-il le bon nombre de chiffres ? Le contrôle du SENS : cette valeur est-elle possible pour cet objet ? ★ Aucun des deux ne demande de refaire le calcul.

Données	contrôle	qu
	le calcul	I r
	le sens	p p c

un seul suffit à conclure au faux

cherche le FACTEUR entre l'attendu et l'annoncé. S'il vaut 10, 100 ou 1000, c'est un zéro ou une virgule ; s'il vaut 1000 exactement, c'est presque toujours une conversion oubliée. ★ Le facteur dit combien de rangs ont été perdus, et donc où regarder.

Données	le facteur	l'e pro
	10	ui
	1000	con
	10 ⁶	(pr cor

le facteur mène à l'erreur

Selon ce que l'on cherche : Ordres de grandeur et préfixes

On me demande de convertir avec un préfixe

On remplace le préfixe par sa puissance de dix et on garde le nombre devant. Pour passer d'un préfixe à un autre, on soustrait les exposants.

On me demande l'ordre de grandeur d'un objet

On ne calcule pas : on se situe par rapport à un repère connu, puis on compte les rangs.

On me demande d'estimer un calcul

On arrondit chaque facteur à une puissance de dix, puis on ajoute les exposants pour un produit, on les soustrait pour un quotient.

Un résultat me paraît étrange

On estime ce qu'il devrait valoir et on compare les rangs. Si l'écart est un facteur 10, 100 ou 1000, l'erreur est un zéro, une virgule ou une conversion.

Exemples corrigés : Ordres de grandeur et préfixes

La facture du collège

Un collège de 480 élèves commande un carnet de correspondance à 21 € l'unité.

Quel est l'ordre de grandeur de la facture ?

Données	on arrondit	à
	480	$10^2 = 100$
	21	$10^1 = 10$
	total	$10^3 = 1000 \text{ €}$

On arrondit d'abord : $480 \approx 10^2$ et $21 \approx 10^1$. On ajoute les exposants : $10^2 \times 10^1 = 10^3$. La facture est de l'ordre de 1000 €. ★ Le total exact vaut $480 \times 21 = 10\,080 \text{ €}$ — dix fois plus. C'est normal : arrondir 480 à 100 plutôt qu'à 1000 fait perdre un rang. ⚠ L'ordre de grandeur donne le rang à un facteur près, pas au chiffre près. Il ne remplace jamais le calcul ; il dit si le calcul est plausible.

Le facteur mille

Un élève convertit 5 kilomètres en millimètres et annonce 5 000 mm.

Où est l'erreur ?

Données	passage	facteur
	km → m	$\times 1000$
	m → mm	$\times 1000$
	km → mm	$\times 1\,000\,000$

Un kilomètre vaut 10^3 mètres, et un millimètre vaut 10^{-3} mètre. Pour passer des kilomètres aux millimètres, on soustrait les exposants : $10^3 \div 10^{-3} = 10^6$. Donc $5 \text{ km} = 5 \times 10^6 \text{ mm}$, soit 5 000 000 mm — mille fois plus que la réponse annoncée. ★ L'élève n'a fait qu'UNE des deux conversions. Le facteur perdu vaut exactement 1000, et c'est ce qui désigne l'erreur : un facteur rond de 1000 est presque toujours une conversion oubliée. ⚠ Soustraire un exposant négatif revient à l'ajouter — c'est là que le calcul dérape le plus souvent.

Combien de fois plus grand

Une bactérie mesure de l'ordre de 10^{-6} m , la distance Terre-Lune est de l'ordre de 10^8 m .

Combien de fois la seconde est-elle plus grande que la première ?

Données	grandeur	exposant
	bactérie	-6
	Terre-Lune	8
	écart	14

Comparer deux ordres de grandeur, c'est les diviser, donc soustraire leurs exposants : $10^8 \div 10^{-6} = 10^{8-(-6)} = 10^{14}$. La distance Terre-Lune est donc environ 10^{14} fois plus grande qu'une bactérie — cent mille milliards de fois. ★ Ce nombre n'a aucun équivalent dans l'expérience quotidienne, et c'est précisément pour cela qu'on écrit en puissances de dix : « cent mille milliards » ne se compare à rien, « 10^{14} » se compare à tout.

Pièges à éviter : Ordres de grandeur et préfixes

Croire que « micro » veut dire « petit ». En mathématiques il vaut exactement 10^{-6} .

Multiplier les exposants au lieu de les ajouter. $10^4 \times 10^3$ vaut 10^7 , pas 10^{12} .

Ajouter les exposants dans une division. On les soustrait.

Oublier qu'un exposant négatif plus grand en valeur absolue donne un nombre plus PETIT. 10^{-10} est plus petit que 10^{-6} .

Calculer le produit exact avant d'arrondir. C'est exactement le travail qu'on cherchait à éviter.

N'appliquer qu'une conversion sur deux. De kilomètres à millimètres, il y a 10^6 , pas 10^3 .

Confondre méga et giga : il y a un facteur mille entre les deux, et c'est le facteur d'erreur le plus fréquent en informatique.

À retenir : Ordres de grandeur et préfixes

L'ordre de grandeur d'un nombre est la puissance de dix la plus proche : il donne le RANG, pas le chiffre.

Les six préfixes vont de trois en trois : nano 10^{-9} , micro 10^{-6} , milli 10^{-3} , kilo 10^3 , méga 10^6 , giga 10^9 .

Un préfixe est une valeur exacte, jamais une impression de taille.

Multiplier des puissances de dix, c'est AJOUTER les exposants ; diviser, c'est les SOUSTRAIRE.

Pour estimer : on arrondit d'abord, on calcule ensuite — jamais l'inverse.

Pour juger un résultat, deux contrôles suffisent : le bon rang, et le sens de la situation.

Quand un résultat est faux, on cherche le FACTEUR perdu : 10, 100 ou 1000 désigne l'erreur.

Exercices corrigés : Ordres de grandeur et préfixes

1. Par quelle puissance de 10 le préfixe « nano » multiplie-t-il l'unité ?

Correction :

Par 10^{-9} , soit un milliardième.

2. Écris 6 mégaoctets en notation scientifique, en octets.

Correction :

« Méga » vaut 10^6 , donc 6 mégaoctets = 6×10^6 octets. ⚠ Le nombre devant ne change pas.

3. Combien de fois 1 gigamètre est-il plus grand que 1 millimètre ?

Correction :

Giga vaut 10^9 et milli vaut 10^{-3} . L'écart des exposants vaut $9 - (-3) = 12$, donc 10^{12} fois.

4. Quel est l'ordre de grandeur de la taille d'une bactérie ?

Correction :

Environ 10^{-6} mètre, soit un micromètre — cent fois plus petit que l'épaisseur d'un cheveu.

5. Range du plus petit au plus grand : la distance Terre-Lune, un atome, l'altitude du Piton des Neiges.

Correction :

Un atome (10^{-10} m) < le Piton des Neiges (10^3 m) < la distance Terre-Lune (10^8 m). On range les exposants.

6. Quel est l'ordre de grandeur du produit $9\,800 \times 96$?

Correction :

$9\,800 \approx 10^4$ et $96 \approx 10^2$, donc le produit est de l'ordre de 10^6 .

7. Que vaut $10^9 \div 10^4$?

Correction :

$10^{9-4} = 10^5$. Pour une division, on soustrait les exposants.

8. Un élève calcule la masse d'un chat et trouve 4 tonnes. Que peut-on dire ?

Correction :

C'est faux : un chat pèse quelques kilogrammes, de l'ordre de 10^0 kg. Quatre tonnes, c'est 4×10^3 kg — mille fois trop.

9. On lit : « la longueur d'une salle de classe vaut 1 nanomètre ». Qu'en penses-tu ?

Correction :

C'est absurde. Une salle mesure de l'ordre de 10^1 mètre ; un nanomètre vaut 10^{-9} mètre. L'écart est de dix rangs.

10. Un élève convertit 3 gigaoctets en octets et trouve 3 000 000 octets. Où est l'erreur ?

Correction :

Il a confondu giga et méga. Giga vaut 10^9 , donc $3 \text{ Go} = 3 \times 10^9 = 3\,000\,000\,000$ octets. Le facteur perdu vaut 1000 : c'est la signature de deux préfixes voisins confondus.