

Le parallélogramme — cours de maths 4e

Un parallélogramme, c'est un rectangle qu'on a poussé de côté. Tout ce qui compte y reste : les côtés opposés sont toujours égaux, les diagonales se coupent toujours en leur milieu, et son aire vaut encore base $\times$ hauteur.

LA DÉFINITION

Deux couples de côtés parallèles

LE POINT DE CROISEMENT

Les diagonales s'y coupent en leur milieu

LE PIÈGE

La hauteur, qui n'est pas le côté oblique

À quoi ça sert : le parallélogramme

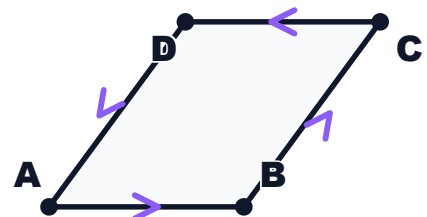
Le parallélogramme est la forme des choses qui se déforment sans se casser. À La Réunion, c'est le portail en croisillons qu'on replie, le pantographe d'un vieux train, le vérin d'un cric de voiture, la barrière de chantier accordéon. Les côtés gardent leur longueur, seuls les angles changent : c'est pourquoi un cadre rectangulaire mal fixé finit toujours en parallélogramme, et pourquoi les charpentiers ajoutent une diagonale pour l'en empêcher.

Un peu d'histoire : le parallélogramme

Euclide démontre déjà les propriétés du parallélogramme dans les Éléments, vers 300 avant notre ère : c'est la proposition 34 du livre I. Sa démonstration ne mesure rien — elle découpe la figure en deux triangles par une diagonale et montre qu'ils sont superposables. C'est encore la démonstration qu'on enseigne aujourd'hui, vingt-trois siècles plus tard.

Définition : le parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. C'est la seule condition : dès qu'elle est vérifiée, toutes les autres propriétés en découlent — les côtés opposés sont égaux, les angles opposés sont égaux, et les diagonales se coupent en leur milieu.

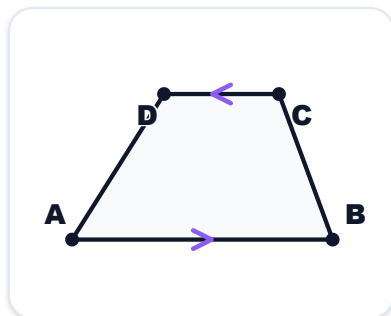


Deux couples de côtés parallèles : $(AB) \parallel (CD)$ et $(BC) \parallel (DA)$.

Propriétés : le parallélogramme

Ce qui n'en est pas un

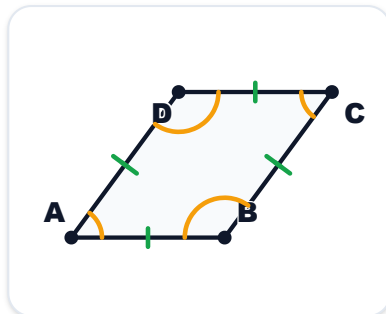
Être penché ne suffit pas. Ce trapèze n'a qu'un seul couple de côtés parallèles : ses côtés opposés ne sont pas égaux et ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu.



**un seul couple de parallèles :
c'est un trapèze**

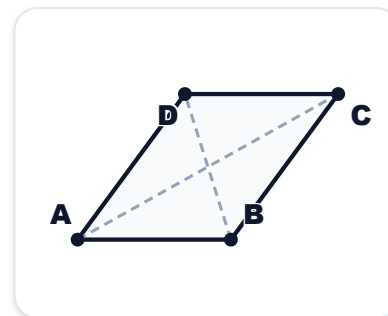
Ce qui est égal

Les côtés opposés sont égaux deux à deux, et les angles opposés aussi. Deux angles qui se suivent, eux, font toujours 180° ensemble.



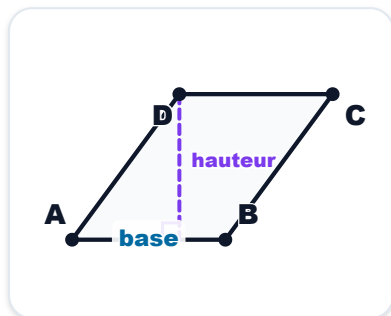
Les diagonales se coupent en leur milieu

Le point où les deux diagonales se croisent est le milieu de chacune. C'est le centre de la figure, et c'est souvent le plus rapide des trois chemins pour démontrer.



La hauteur n'est pas le côté

La hauteur est perpendiculaire à la base, pas le long du côté oblique. Elle est toujours plus courte que lui, et son pied peut tomber en dehors de la figure.

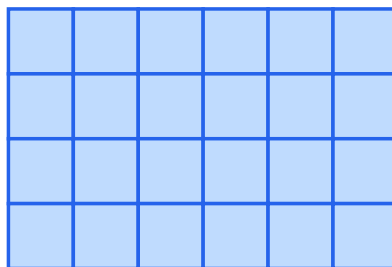


La formule : le parallélogramme

POUR UN PARALLÉLOGRAMME DE BASE B ET DE HAUTEUR H

$$\text{aire} = b \times h$$

C'est l'aire du rectangle de mêmes base et hauteur : le triangle qui dépasse d'un côté est exactement celui qui manque de l'autre.

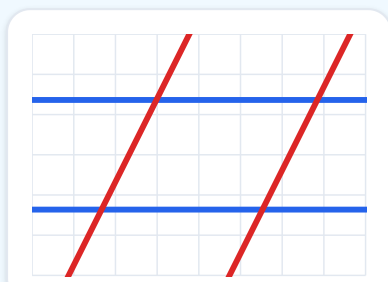


$6 \times 4 = 24$ carreaux, comme le rectangle

Méthode : le parallélogramme

1. Reconnaître

On ne regarde pas la forme, on cherche les marques : deux couples de droites parallèles. S'il n'y en a qu'un, c'est un trapèze, et aucune propriété du parallélogramme ne s'applique.



deux couples de parallèles

2. Montrer

Trois chemins mènent à la conclusion, et un seul suffit. On choisit celui dont l'énoncé donne déjà les données — le plus souvent celui des diagonales.

Données	Ce que je sais	
	2 couples de côtés //	f
	côtés opposés égaux	f
	diagonales de même milieu	f

3. Calculer l'aire

On repère d'abord la base, puis la hauteur qui lui est perpendiculaire — surtout pas le côté oblique.

Ensuite, une seule multiplication, et l'unité est en cm^2 .

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \end{array}$$

base $\times$ hauteur = 72 cm^2

Selon ce que l'on cherche : le parallélogramme

Reconnaître la figure

On vérifie les deux couples de côtés parallèles sur le codage. Si un seul couple est marqué, c'est un trapèze et non un parallélogramme.

Démontrer qu'en est un

On choisit le chemin qui colle aux données : côtés parallèles, côtés opposés égaux, ou diagonales de

Calculer une aire

On multiplie la base par la hauteur perpendiculaire à cette base. Deux couples base-hauteur donnent la même aire : c'est un bon contrôle.

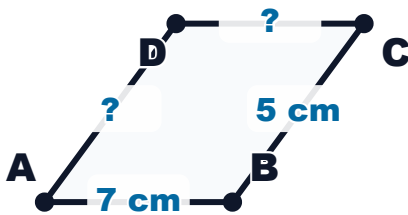
même milieu. Une seule condition suffit.

Exemples corrigés : le parallélogramme

Le côté qui manque

ABCD est un parallélogramme. On mesure $AB = 7 \text{ cm}$ et $BC = 5 \text{ cm}$.

Combien mesurent CD et DA ?

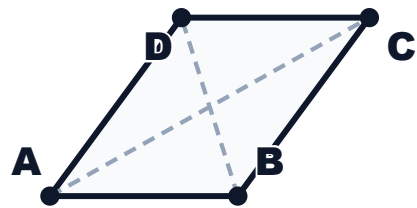


Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont égaux. Or CD est le côté opposé à AB, donc $CD = AB = 7 \text{ cm}$. De même, DA est le côté opposé à BC, donc $DA = BC = 5 \text{ cm}$. Contrôle : le périmètre vaut $2 \times (7 + 5) = 24 \text{ cm}$.

Le prouver par les diagonales

ABCD est un quadrilatère. On sait que ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en un point O qui est le milieu de chacune d'elles.

ABCD est-il un parallélogramme ?

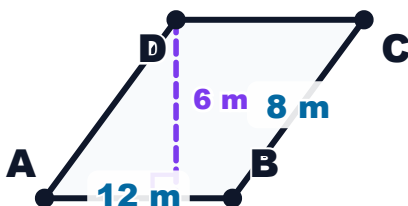


Oui. Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. C'est l'un des trois chemins possibles, et ici c'est celui que l'énoncé donne directement : il n'y a rien d'autre à vérifier.

L'aire de la parcelle

Une parcelle en forme de parallélogramme a une base de 12 m. Le côté oblique mesure 8 m, et la hauteur relative à la base mesure 6 m.

Quelle est l'aire de la parcelle ?



L'aire d'un parallélogramme vaut base $\times$ hauteur. La base est 12 m et la hauteur est 6 m : l'aire vaut $12 \times 6 = 72 \text{ m}^2$. Attention, le côté de 8 m ne sert à rien ici — c'est le côté oblique, pas la hauteur. Il n'est là que pour le périmètre.

Pièges à éviter : le parallélogramme

Prendre le côté oblique pour la hauteur : la hauteur est perpendiculaire à la base, et elle tombe souvent en dehors de la figure.

Croire qu'un quadrilatère penché est forcément un parallélogramme : le trapèze aussi est penché, mais il n'a qu'un seul couple de côtés parallèles.

Confondre « les diagonales se coupent » et « les diagonales se coupent en leur milieu » : c'est le milieu qui fait la propriété, pas le croisement.

À retenir : le parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Ses côtés opposés sont égaux, ses angles opposés sont égaux, et ses diagonales se coupent en leur milieu.

Son aire vaut base $\times$ hauteur, où la hauteur est perpendiculaire à la base — jamais le côté oblique.

Exercices corrigés : le parallélogramme

1. Un quadrilatère a un seul couple de côtés parallèles. Est-ce un parallélogramme ?

Correction :

Non, c'est un trapèze. Le parallélogramme demande DEUX couples de côtés parallèles. Avec un seul, les côtés opposés ne sont pas forcément égaux et les diagonales ne se coupent pas en leur milieu.

2. Dans un parallélogramme ABCD, l'angle en A mesure 65° . Combien mesurent les angles B, C et D ?

Correction :

Les angles opposés sont égaux, donc $C = A = 65^\circ$. Deux angles consécutifs font 180° , donc $B = 180 - 65 = 115^\circ$, et $D = B = 115^\circ$. Contrôle : $65 + 115 + 65 + 115 = 360^\circ$, ce qui est bien la somme des angles d'un quadrilatère.

3. Un parallélogramme a une base de 15 cm, un côté oblique de 10 cm et une hauteur de 8 cm. Quelle est son aire ?

Correction :

L'aire vaut base $\times$ hauteur, soit $15 \times 8 = 120 \text{ cm}^2$. Le côté de 10 cm est le côté oblique : il ne sert pas au calcul de l'aire. C'est le piège le plus fréquent de la notion.

4. Pourquoi un charpentier ajoute-t-il une diagonale dans un cadre rectangulaire ?

Correction :

Parce qu'un cadre dont les quatre côtés gardent leur longueur peut se déformer en parallélogramme : seuls les angles changent. La diagonale fixe deux triangles, et un triangle dont les trois côtés sont fixés ne se déforme pas. C'est ce qui rend la structure rigide.