

Périmètres : polygones, cercle et figures composées

cours et exercices corrigés de maths 3e

Pour clôturer un terrain, on achète du grillage au mètre ; pour l'engazonner, on achète de la pelouse au mètre carré. Les deux questions portent sur le même terrain et n'ont rien à voir : la première mesure un CONTOUR, la seconde une SURFACE. Toute la difficulté du chapitre tient à ne pas confondre les deux — et le cercle est l'endroit où presque tout le monde s'y trompe, parce que ses deux formules se ressemblent.

CE QUE C'EST

La longueur du TOUR de la figure

LE CERCLE

$2\pi r$, ou πd — jamais πr^2

L'UNITÉ

**Une longueur : cm, m, km.
Jamais de cm^2**

À quoi ça sert : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

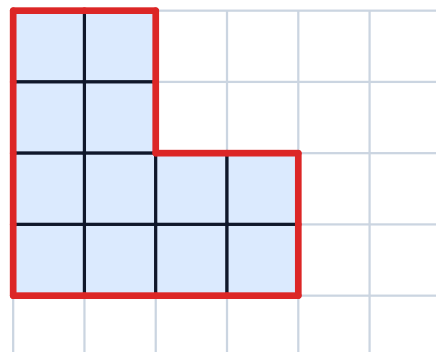
Le périmètre est ce qu'on achète au mètre. Une clôture pour un terrain, une plinthe au pied d'un mur, un joint autour d'une fenêtre, un ourlet sur un tissu : tout cela se compte en longueur de contour, et une erreur de calcul se paie très concrètement en matériau manquant. À La Réunion, c'est aussi la mesure des parcours — le tour d'un stade, la longueur d'un sentier balisé. Et l'écart entre aire et périmètre a une conséquence économique nette : pour une même surface de terrain, une parcelle très allongée coûte beaucoup plus cher à clôturer qu'une parcelle carrée, alors qu'elle ne se vend pas plus cher.

Un peu d'histoire : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

Le nombre π est le rapport entre la longueur d'un cercle et son diamètre, et l'étonnant est qu'il ne dépende PAS du cercle choisi : petit ou grand, ce rapport vaut toujours la même chose. Les Babyloniens l'approchaient déjà par 3, les Égyptiens par une valeur proche de 3,16. C'est Archimède, vers 250 avant notre ère, qui donne la première méthode rigoureuse : il enferme le cercle entre deux polygones réguliers, l'un inscrit et l'autre circonscrit, et calcule leurs périmètres. En poussant jusqu'à 96 côtés, il obtient un encadrement remarquablement serré — entre $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{1}{7}$. Il ne cherchait pas π pour lui-même : il cherchait un périmètre.

Définition : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

Le périmètre d'une figure est la longueur de son contour, c'est-à-dire la distance qu'il faudrait parcourir pour en faire le tour complet. C'est une **LONGUEUR** : il s'exprime dans la même unité que les côtés — en centimètres si les côtés sont en centimètres. L'aire, elle, mesure la surface couverte et s'exprime en unités carrées. Deux figures peuvent parfaitement avoir la même aire et des périmètres très différents : ce sont deux grandeurs indépendantes.



Le trait qui fait le tour est le périmètre ; les cases coloriées sont l'aire. Ce sont deux mesures de la même figure, et elles ne se calculent pas de la même façon.

Propriétés : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

Un contour, pas une surface

Le périmètre se parcourt, l'aire se recouvre. La conséquence la plus utile est celle de l'UNITÉ : un périmètre s'exprime en centimètres, en mètres ou en kilomètres, jamais en cm^2 . Un résultat annoncé en unités carrées pour un périmètre signale à coup sûr qu'on a calculé autre chose. 🚫 Et un rectangle de 8 cm sur 5 cm a pour périmètre 26 cm, pas $40 : 8 \times 5$ donne son AIRE.

on mesure	avec quoi	unité
le périmètre	le tour	cm
l'aire	la surface	cm^2
8 sur 5	26 ou 40	selon

l'unité tranche à elle seule

Pour un rectangle de 8 sur 5 : périmètre 26 cm, aire 40 cm^2 .

Un polygone : on additionne ses côtés

Pour n'importe quel polygone, le périmètre est la somme de toutes les longueurs de ses côtés — il n'y a pas d'autre méthode, et aucune formule n'est nécessaire. Les figures usuelles offrent seulement des raccourcis : un carré de côté c a pour périmètre $4c$, et un rectangle de longueur L et de largeur l a pour périmètre $2(L + l)$, puisque chaque dimension y figure deux fois.

figure	périmètre
carré de côté c	$4c$
rectangle L et l	$2(L + l)$
triangle a , b , c	$a + b + c$
polygone quelconque	somme des côtés

toujours une somme de longueurs

Les formules ne sont que des sommes écrites plus court.

Le cercle : $2\pi r$, et surtout pas πr^2

La longueur d'un cercle — on dit aussi sa circonférence — vaut $2\pi r$, où r est le rayon. Comme le diamètre vaut $2r$, elle s'écrit aussi πd , ce qui est souvent plus rapide quand c'est le diamètre qui est donné. 🚫 L'erreur constante consiste à employer πr^2 : cette formule-là donne l'AIRE du disque, et son résultat s'exprimerait en cm^2 . Le carré dans la formule trahit la surface.



Le trait fait le tour : sa longueur vaut $2\pi r$, en centimètres.

Deux formules à ne plus confondre

Elles se distinguent par trois signes.

La longueur du cercle porte un facteur 2 et un rayon à la puissance 1 ; l'aire du disque n'a pas de 2 mais un rayon au CARRÉ. Et leurs unités diffèrent : des centimètres d'un côté, des centimètres carrés de l'autre. Un dernier repère verbal aide : on parle de la longueur d'un CERCLE — qui est une ligne — et de l'aire d'un DISQUE — qui est une surface pleine.

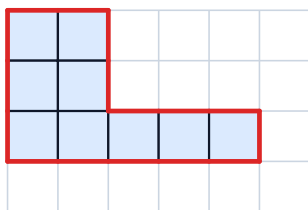
objet	formule	unité
le cercle (ligne)	$2\pi r$	cm
le disque (surface)	πr^2	cm ²

le carré trahit la surface

Si la formule contient r^2 , elle ne peut pas donner un périmètre.

Une figure composée : on suit le contour

Devant une figure en L ou en escalier, on ne cherche pas de formule : on parcourt le contour et on additionne les longueurs rencontrées, une à une, sans en sauter ni en compter deux fois. ⚠ Le piège est de vouloir découper la figure en rectangles : cela marche pour l'AIRe, mais pas pour le périmètre, car les côtés intérieurs du découpage n'appartiennent pas au contour.



On suit le trait sans le quitter : les traits intérieurs ne comptent pas.

Un demi-cercle a deux morceaux

Le contour d'un demi-disque se compose de l'ARC — la moitié du cercle, soit $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$ — et du DIAMÈTRE qui le referme, soit $2r$. Son périmètre complet vaut donc $\pi r + 2r$. ⚠ Si l'énoncé ne demande que la longueur de l'arc, c'est-à-dire la partie courbe, on s'arrête à πr : lire précisément ce qui est demandé fait ici toute la différence.

ce qu'on demande	on calcule
l'arc seul	πr
le tour complet	$\pi r + 2r$

le diamètre referme la figure

Un demi-cercle n'est pas une figure fermée : il lui faut son diamètre.

Même aire ne veut pas dire même périmètre

Deux figures de même aire peuvent avoir des périmètres très différents, et c'est facile à voir : un rectangle de 1 sur 36 et un carré de 6 sur 6 couvrent tous deux 36 unités carrées, mais le premier a un périmètre de 74 et le second de 24. Plus une figure est allongée, plus son contour s'étire à surface égale — c'est pourquoi le carré est, parmi tous les rectangles de même aire, celui qui a le plus petit périmètre.

figure	aire	périmètre
1×36	36	74
4×9	36	26
6×6	36	24

même aire, trois contours

Les deux grandeurs sont indépendantes : l'une ne détermine pas l'autre.

Doubler le rayon double la longueur

Si l'on multiplie le rayon d'un cercle par 2, sa longueur $2\pi r$ est multipliée par 2 elle aussi — car r y figure à la puissance 1. C'est vrai de tout périmètre : agrandir une figure dans un rapport k multiplie son contour par k . ★ Retenez ce cas simple : l'aire, elle, sera multipliée par k^2 , et un volume par k^3 . Une longueur suit le rapport tel quel — c'est le seul des trois qui le fasse.

on agrandit de k	ce qui est multiplié par
une longueur	k
une aire	k^2
un volume	k^3

l'exposant dit la dimension

Un contour est une longueur : il suit donc le rapport sans exposant.

La formule : Périmètres : polygones, cercle et figures

composées

LA LONGUEUR D'UN CERCLE, ET LES PÉRIMÈTRES USUELS

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{cercle}} &= 2\pi r = \pi d \\ \mathcal{P}_{\text{carré}} &= 4c \\ \mathcal{P}_{\text{rect.}} &= 2(L + l) \end{aligned}$$

⚠ La formule du cercle existe en deux versions parce que les énoncés donnent tantôt le rayon, tantôt le diamètre. Employer la mauvaise donnée est aussi fréquent qu'employer la mauvaise formule : avec un diamètre de 12 cm, écrire $2\pi \times 12$ double la réponse, car 12 est déjà le double du rayon.

donnée	on écrit	exemple
rayon 5	$2\pi \times 5$	31,4 cm
diamètre 12	$\pi \times 12$	37,68 cm
diamètre 12	$2\pi \times 12$	faux

avec $\pi \approx 3,14$

On regarde d'abord CE QUI EST DONNÉ, et on choisit la version qui va avec.

Méthode : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

1. Se demander d'abord : contour ou surface ?

Un énoncé qui parle de clôture, de bordure, de tour ou de longueur demande un périmètre. S'il parle de recouvrir, de peindre, de carrelé ou de semer, il demande une aire.

L'unité attendue confirme : cm pour l'un, cm² pour l'autre.

2. Pour un polygone : parcourir, ne pas deviner

On suit le contour dans un sens, on note chaque longueur, on additionne. Sur une figure composée, cette méthode est la seule sûre — les formules des figures usuelles ne s'y appliquent pas.

3. Pour un cercle : regarder ce qui est donné

Rayon donné : $2\pi r$. Diamètre donné : πd . ⚠ Ne jamais mélanger les deux en écrivant $2\pi d$, qui double le résultat. Et si l'énoncé demande une valeur « exacte », on garde π dans la réponse au lieu de le remplacer par 3,14.

4. Contrôler par l'unité

Le résultat doit être une longueur.
Un périmètre exprimé en cm^2 est nécessairement faux, et cette vérification coûte une seconde. Elle attrape en particulier la confusion entre $2\pi r$ et πr^2 .

5. Lire précisément ce qui est demandé

Sur un demi-cercle, « la longueur de l'arc » et « le périmètre de la figure » ne sont pas la même question : la seconde ajoute le diamètre. Souligner le mot exact de l'énoncé évite une erreur qui n'a rien de mathématique.

Selon ce que l'on cherche : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

La figure est un polygone usuel

J'applique le raccourci : $4c$ pour un carré, $2(L + l)$ pour un rectangle.
Ce ne sont que des sommes de côtés.

La figure est un polygone quelconque

J'additionne tous les côtés, en suivant le contour pour n'en oublier aucun.

La figure contient un cercle

J'utilise $2\pi r$ si le rayon est donné, πd si c'est le diamètre. Jamais πr^2 , qui donne une aire.

La figure est composée

Je parcours le contour et j'additionne. Je ne découpe pas la figure : les traits de découpe ne sont pas sur le tour.

On me demande de comparer deux figures

Je calcule séparément les deux grandeurs demandées : une même aire n'entraîne pas un même périmètre.

Exemples corrigés : Périmètres : polygones, cercle et figures

composées

Le terrain à clôturer

Un terrain rectangulaire mesure 20 m sur 15 m.

Quelle longueur de clôture faut-il pour l'entourer entièrement ?

ce qu'on veut	calcul	résultat
la clôture	$2 \times (20 + 15)$	70 m
le gazon	20×15	300 m ²

même terrain, deux questions

Le grillage se compte en mètres, le gazon en mètres carrés.

La clôture suit le contour : c'est donc un périmètre.
Pour un rectangle, chaque dimension figure deux fois : $\mathcal{P} = 2 \times (20 + 15) = 2 \times 35 = 70$ m. ➖
Répondre 300 serait calculer 20×15 , c'est-à-dire l'AIRE du terrain — la quantité de gazon, pas la longueur de grillage. L'unité le dit : on achète du grillage au mètre, et 300 m² n'est pas une longueur.

La longueur d'un cercle

Un cercle a un diamètre de 12 cm. On prendra $\pi \approx 3,14$.

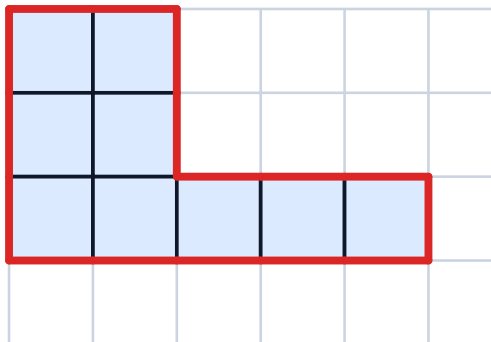
Quelle est sa longueur, au centième près ?

Le diamètre étant donné, on utilise directement $\mathcal{P} = \pi d = 3,14 \times 12 = 37,68$ cm. ➖ Écrire $2\pi \times 12$ serait une double erreur de lecture : le facteur 2 sert à passer du rayon au diamètre, et le diamètre est déjà là. On obtiendrait 75,36 cm, soit exactement le double du bon résultat. Contrôle de plausibilité : la longueur d'un cercle vaut environ trois fois son diamètre, et 37,68 est bien un peu plus de trois fois 12.

La figure en L

Une figure en L a pour côtés successifs 3 cm, 2 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm et 6 cm.

Quel est son périmètre ?



Un seul trait fait le tour : c'est lui qu'on mesure.

Aucune formule ne s'applique : on additionne simplement toutes les longueurs du contour, dans l'ordre où on les rencontre. $3 + 2 + 2 + 4 + 5 + 6 = 22$ cm. ⚠ La tentation est de découper la figure en deux rectangles et d'additionner leurs périmètres — ce serait faux, car on compterait alors deux fois le trait de découpe, qui n'appartient pas au contour. Le découpage est utile pour l'aire, jamais pour le périmètre.

L'arc d'un demi-cercle

Une piste a la forme d'un demi-cercle de rayon 20 m. On prendra $\pi \approx 3,14$.

Quelle est la longueur de la partie courbe ?

L'arc est la moitié d'un cercle complet. La longueur du cercle entier vaut $2\pi r = 2 \times 3,14 \times 20 = 125,6$ m ; sa moitié vaut donc 62,8 m. On peut aussi l'écrire directement $\pi r = 3,14 \times 20 = 62,8$ m. ⚠ L'énoncé ne demande QUE la partie courbe : on n'ajoute pas le diamètre. Si l'on avait demandé le périmètre complet de la figure, il aurait fallu ajouter $2r = 40$ m, soit 102,8 m.

Pièges à éviter : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

Calculer 8×5 pour le périmètre d'un rectangle de 8 sur 5. C'est son aire ; le périmètre vaut $2 \times (8 + 5) = 26$.

Employer πr^2 pour la longueur d'un cercle. Cette formule donne l'aire du DISQUE ; la longueur vaut $2\pi r$.

Écrire $2\pi d$ quand le diamètre est donné. Le facteur 2 sert justement à passer du rayon au diamètre : c'est πd .

Exprimer un périmètre en cm^2 . Un contour est une longueur, jamais une surface.

Découper une figure composée et additionner les périmètres des morceaux : le trait de découpe serait compté, alors qu'il n'est pas sur le contour.

Confondre l'arc d'un demi-cercle et le périmètre du demi-disque : le second ajoute le diamètre.

Croire que deux figures de même aire ont le même périmètre. Un 1×36 et un 6×6 ont la même aire, et des périmètres de 74 et 24.

À retenir : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

Le périmètre est la longueur du contour : il s'exprime en cm, jamais en cm^2 .

Pour un polygone quelconque, on additionne simplement tous les côtés.

Carré : $4c$. Rectangle : $2(L + l)$.

Cercle : $2\pi r$ si l'on a le rayon, πd si l'on a le diamètre.

πr^2 est l'aire du disque — jamais un périmètre.

Sur une figure composée, on suit le contour ; on ne la découpe pas.

Agrandir dans un rapport k multiplie les longueurs par k — les aires par k^2 .

Exercices corrigés : Périmètres : polygones, cercle et figures composées

1. Le périmètre d'une figure mesure quoi, exactement ?

Correction :

La longueur de son contour, c'est-à-dire la distance à parcourir pour en faire le tour. Ce n'est pas sa surface, qui est mesurée par l'aire.

2. Quel est le périmètre d'un rectangle de 9 cm sur 4 cm ?

Correction :

$2 \times (9 + 4) = 2 \times 13 = 26$ cm. Chaque dimension apparaît deux fois sur le contour.

3. Un carré a un périmètre de 28 cm. Quelle est la longueur de son côté ?

Correction :

Le périmètre vaut $4c$, donc $c = 28 \div 4 = 7$ cm. Contrôle : $4 \times 7 = 28$.

4. Quelle est la formule de la longueur d'un cercle de rayon r ?

Correction :

$2\pi r$. Avec le diamètre, cela s'écrit aussi πd , puisque $d = 2r$.

5. Un élève utilise πr^2 pour calculer la longueur d'un cercle. A-t-il raison ?

Correction :

Non : πr^2 donne l'aire du disque. Le carré sur le rayon signale une surface, et le résultat s'exprimerait en cm^2 . La longueur vaut $2\pi r$.

6. Un cercle a un rayon de 5 cm. Quelle est sa longueur au centième près, avec $\pi \approx 3,14$?

Correction :

$2 \times 3,14 \times 5 = 31,40$ cm.

7. Une figure en L a pour côtés successifs 4, 3, 2, 5, 6 et 8 cm. Quel est son périmètre ?

Correction :

On additionne toutes les longueurs du contour : $4 + 3 + 2 + 5 + 6 + 8 = 28$ cm. Aucune formule n'intervient.

8. Un demi-cercle a un rayon de 6 cm. Quelle est la longueur exacte de son arc ?

Correction :

La moitié de $2\pi \times 6 = 12\pi$, soit 6π cm. « Exacte » signifie qu'on garde π au lieu de le remplacer par 3,14.

9. Deux figures ont la même aire. Ont-elles forcément le même périmètre ?

Correction :

Non. Un rectangle de 1×36 et un carré de 6×6 ont tous deux une aire de 36, mais des périmètres de 74 et 24. Les deux grandeurs sont indépendantes.

10. Si l'on double le rayon d'un cercle, par combien sa longueur est-elle multipliée ?

Correction :

Par 2. Dans $2\pi r$, le rayon figure à la puissance 1 : une longueur suit donc le rapport d'agrandissement tel quel. L'aire, elle, serait multipliée par 4.