

La proportionnalité — cours de maths 4e

Deux grandeurs sont proportionnelles quand un seul nombre suffit à passer de l'une à l'autre. C'est ce qui permet de calculer le prix de cinq kilos quand on connaît celui de trois — et, en 4e, de traiter les pourcentages et les hausses de prix d'un seul coup.

LE MOT CLÉ

Multiplier toujours par le même nombre

L'OUTIL

Le produit en croix, et le coefficient multiplicateur

LE PIÈGE

Un tableau régulier n'est pas forcément proportionnel

À quoi ça sert : la proportionnalité

La proportionnalité est le calcul le plus fréquent d'une journée. À La Réunion, c'est le prix au kilo au marché de Saint-Paul, la recette qu'on double, l'échelle d'une carte de randonnée, la consommation d'une voiture aux 100 km. Et le coefficient multiplicateur est partout dès qu'un prix bouge : les soldes à - 30 %, la TVA, une augmentation de loyer. Savoir qu'une baisse de 30 % se fait en multipliant par 0,70 évite de sortir la calculatrice deux fois.

Un peu d'histoire : la proportionnalité

La règle de trois est enseignée depuis l'Antiquité, mais c'est le commerce médiéval qui l'a rendue centrale : les marchands italiens du XIIIe siècle l'appelaient « la règle d'or », et Leonardo Fibonacci lui consacre un chapitre entier de son Liber Abaci en 1202. Le mot « pourcentage », lui, vient de l'italien « per cento » — les banquiers de Venise comptaient déjà les intérêts sur cent.

Définition : la proportionnalité

Deux grandeurs sont proportionnelles lorsqu'on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le même nombre. Ce nombre s'appelle le coefficient de proportionnalité. Dans un tableau, cela signifie que chaque valeur de la seconde ligne s'obtient en multipliant celle du dessus par ce même coefficient.

	1re valeur	2e valeur
départ	2	4
arrivée	10	20

2 devient 10, et 4 devient 20 : on multiplie toujours par 5.

Propriétés : la proportionnalité

Régulier ne veut pas dire proportionnel

Ici on ajoute 4 à chaque fois : le tableau est parfaitement régulier.
Mais $6 \div 2 = 3$ et $9 \div 5 = 1,8$: le rapport change, donc ce n'est pas proportionnel.

Données	si...	alors...
	2	6
	5	9
	mais $6 \div 2 = 3$	et $9 \div 5 = 1,8$

régulier, mais pas proportionnel

on ajoute toujours pareil, et pourtant c'est faux

La quatrième proportionnelle

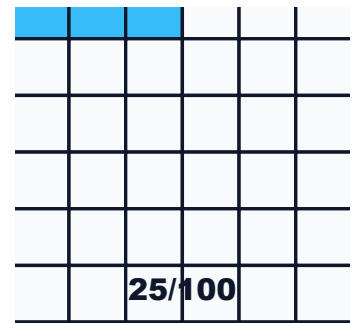
Trois valeurs connues, une manquante : on multiplie les deux nombres placés en diagonale, puis on divise par le troisième. C'est le produit en croix.

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ \times & 1 \quad 2 \\ \hline & 6 \quad 0 \end{array}$$

puis $60 \div 3 = 20 \text{ €}$

« Pour cent » se compte sur cent

25 %, c'est 25 parts sur 100. C'est aussi une fraction — un quart — et un coefficient : multiplier par 0,25.



25 sur 100, soit $\frac{1}{4}$

Le coefficient multiplicateur

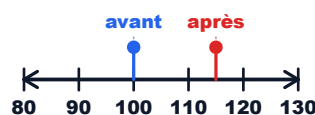
Augmenter de 15 %, c'est garder le tout ET ajouter 15 parts sur 100 : on multiplie donc par 1,15, pas par 0,15. Une baisse de 15 % donne $1 - 0,15 = 0,85$.



d'un coup : $100 \times 1,15$

Deux évolutions ne s'additionnent pas

Une hausse de 15 % suivie d'une baisse de 15 % ne ramène pas au prix de départ : on multiplie par 1,15 puis par 0,85, soit par 0,9775. Il manque 2,25 %.



+ 15 % puis - 15 % ne ramène PAS à 100

La formule : la proportionnalité

POUR UNE ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

hausse de t % $\rightarrow \times (1 + t \div 100)$ • baisse de t % $\rightarrow \times (1 - t \div 100)$

Le coefficient part toujours de 1, parce qu'on garde le tout avant d'ajouter ou de retirer. C'est pourquoi une hausse donne un nombre plus grand que 1, et une baisse un nombre plus petit.

Méthode : la proportionnalité

1. Vérifier

Avant tout calcul, on divise chaque valeur de la seconde ligne par celle du dessus. Si on obtient toujours le même nombre, c'est proportionnel — et ce nombre est le coefficient. Sinon, aucune des règles qui suivent ne s'applique.

2. Calculer en croix

On range les quatre nombres dans un tableau à deux lignes, en respectant les unités. On multiplie les deux nombres en diagonale de la case vide, puis on divise par le troisième.

	kg	kg
masse	3	5
prix (€)	12	?

3. Passer par le coefficient

Pour une évolution, on ne calcule pas la part puis la somme : on trouve directement le coefficient. On part de 1, on ajoute ou on retire le pourcentage écrit en décimal, et une seule multiplication suffit.

Données	évolution	c
	+ 20 %	
	+ 15 %	
	- 15 %	
	- 30 %	

on part toujours de 1

Selon ce que l'on cherche : la proportionnalité

Reconnaître une situation

On calcule le rapport entre les deux lignes pour chaque colonne. S'il est constant, c'est proportionnel ; s'il change, on ne peut appliquer aucune règle de proportionnalité.

Calculer une valeur manquante

On utilise le produit en croix, ou le coefficient si on l'a déjà trouvé. Les deux donnent le même résultat — le coefficient est plus rapide quand on a plusieurs valeurs à calculer.

Faire évoluer un prix

On transforme le pourcentage en coefficient multiplicateur, puis on multiplie. Pour deux évolutions successives, on multiplie les deux coefficients entre eux.

Exemples corrigés : la proportionnalité

Le prix des cinq kilos

Au marché, 3 kg de lechis coûtent 12 €.

Combien coûtent 5 kg ?

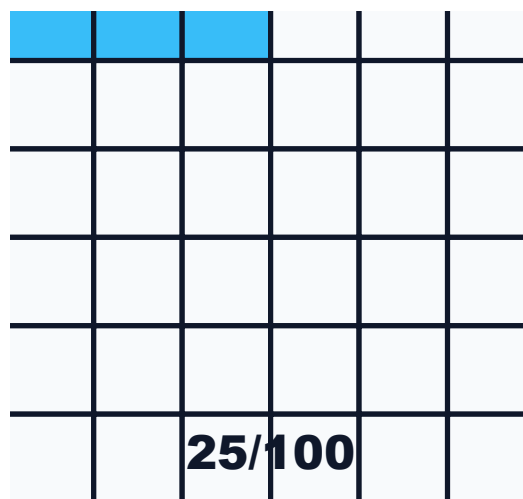
	kg	kg
masse	3	5
prix (€)	12	?

Le prix est proportionnel à la masse. On range les valeurs dans un tableau, puis on fait le produit en croix : $5 \times 12 = 60$, et $60 \div 3 = 20$. Les 5 kg coûtent 20 €. Contrôle par le coefficient : $12 \div 3 = 4$ € le kilo, et $5 \times 4 = 20$ €. Les deux chemins donnent le même résultat.

Vingt-cinq pour cent

On veut prendre 25 % d'une quantité.

À quoi cela correspond-il ?



25 sur 100, soit $\frac{1}{4}$

25 %, c'est 25 parts sur 100, donc la fraction $\frac{25}{100}$, qui se simplifie en $\frac{1}{4}$. Prendre 25 % d'une quantité revient donc à en prendre le quart, c'est-à-dire à multiplier par 0,25 — ou, plus simple de tête, à diviser par 4.

Le prix qui augmente

Un article coûte 100 €. Son prix augmente de 15 %.

Quel est le nouveau prix ?



d'un coup : $100 \times 1,15$

Augmenter de 15 %, c'est garder les 100 % du prix et ajouter 15 % : le coefficient multiplicateur vaut $1 + 0,15 = 1,15$. On calcule $100 \times 1,15 = 115$. Le nouveau prix est de 115 €. ⚠ On ne multiplie pas par 0,15, ce qui donnerait seulement la hausse, ni par 15, qui n'a aucun sens.

Pièges à éviter : la proportionnalité

Prendre un tableau régulier pour un tableau proportionnel : ajouter toujours le même nombre n'est PAS multiplier toujours par le même nombre.

Ajouter le pourcentage au coefficient : une hausse de 20 % ne se fait pas en multipliant par 20, ni par 0,20, mais par 1,20.

Croire qu'une baisse de 15 % annule une hausse de 15 % : 100 devient 115, puis $115 \times 0,85 = 97,75$. On ne revient pas au départ.

À retenir : la proportionnalité

Deux grandeurs sont proportionnelles quand on passe de l'une à l'autre en MULTIPLIANT toujours par le même nombre : le coefficient de proportionnalité.

Une quatrième proportionnelle se calcule par le produit en croix : on multiplie les deux nombres opposés, puis on divise par le troisième.

Une évolution en pourcentage se fait d'un seul coup avec un coefficient multiplicateur : + 15 % donne $\times 1,15$, et - 15 % donne $\times 0,85$.

Exercices corrigés : la proportionnalité

1. Dans un tableau de proportionnalité, si $2 \rightarrow 10$, alors $4 \rightarrow ?$

Correction :

Le coefficient vaut $10 \div 2 = 5$. Donc 4 devient $4 \times 5 = 20$. On peut aussi remarquer que 4 est le double de 2, donc le résultat est le double de 10.

2. Un élève dit : « Si $2 \rightarrow 6$, alors $5 \rightarrow 9$, car j'ajoute 3. » A-t-il raison ?

Correction :

Non. Il a repéré une régularité, mais la proportionnalité se fait en MULTIPLIANT, pas en ajoutant. Ici le rapport vaut $6 \div 2 = 3$ d'un côté, et il devrait donc valoir 3 partout : 5 devrait donner $5 \times 3 = 15$, et non 9. Avec sa méthode, le rapport $9 \div 5 = 1,8$ est différent de 3.

3. Une augmentation de 20 % correspond à multiplier par combien ?

Correction :

Par 1,20. On part de 1, qui représente le prix entier qu'on garde, et on ajoute 20 % écrit en décimal, soit 0,20. Attention : multiplier par 0,20 donnerait seulement le montant de la hausse, pas le nouveau prix.

4. Un prix de 100 € augmente de 15 %, puis baisse de 15 %. Revient-on à 100 € ?

Correction :

Non. La hausse donne $100 \times 1,15 = 115$ €. La baisse s'applique ensuite sur 115, et non sur 100 : $115 \times 0,85 = 97,75$ €. On perd 2,25 € au passage, parce que les deux pourcentages ne portent pas sur la même somme. Deux évolutions se multiplient, elles ne s'additionnent pas.