

Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

cours et exercices corrigés de maths 3e

Une voiture roule à 90 km/h. Ce nombre n'est ni une distance ni une durée : c'est le RAPPORT des deux, et il ne se lit sur aucun compteur autrement que par ce rapport. Vitesse, débit, densité — la troisième introduit ces grandeurs d'un genre particulier, qui ne sont mesurables qu'en divisant. Elles ne sont pas un chapitre à part : ce sont des coefficients de proportionnalité, portant simplement un nom.

LE COEFFICIENT

Un seul nombre relie les deux grandeurs, par multiplication

UNE ÉVOLUTION

Augmenter de 25 %, c'est multiplier par 1,25

LE PIÈGE

+20 % puis -20 % ne ramène PAS au prix de départ

À quoi ça sert : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

Les grandeurs quotients décident de la vie quotidienne à La Réunion. La vitesse limite sur la route du littoral, le débit d'une ravine en saison des pluies — qui dit en litres par seconde si elle va déborder —, la densité de population qui explique pourquoi Saint-Denis se déplace autrement que Cilaos. Et les évolutions successives sont l'outil qu'on subit le plus souvent sans le nommer : une remise de 30 % appliquée après une hausse de 30 % ne rend pas le prix initial, et un commerçant qui l'annonce ainsi n'a pas menti — c'est l'acheteur qui a fait une addition là où il fallait une multiplication.

Un peu d'histoire : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

L'idée qu'une vitesse est un NOMBRE, et non une simple impression de rapidité, est étonnamment tardive. Elle se met en place au XIV^e siècle avec Nicole Oresme, à Paris, qui a l'idée de représenter une grandeur variable par une figure : le temps en abscisse, la vitesse en ordonnée, et l'aire obtenue donnant la distance parcourue. C'est le premier graphique de fonction de l'histoire, trois siècles avant Descartes, et il naît précisément d'un problème de grandeur quotient. Avant lui, on comparait les mouvements ; après lui, on les calcule.

Définition : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

Deux grandeurs sont proportionnelles lorsqu'on passe de l'une à l'autre en multipliant toujours par le **MÊME** nombre, appelé coefficient de proportionnalité. Une grandeur quotient est ce coefficient quand il porte un nom : la vitesse relie une distance à une durée, le débit un volume à une durée, la densité une population à une surface. Dire qu'une voiture roule à 90 km/h signifie exactement que la distance parcourue est proportionnelle au temps écoulé, avec 90 pour coefficient.

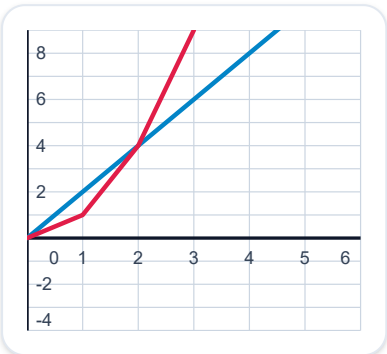
temps (h)	1	2	3	4
distance (km)	90	180	270	?

Chaque heure ajoute les mêmes 90 kilomètres : c'est la définition même d'une vitesse constante. Le coefficient est 90, et la case manquante vaut 360.

Propriétés : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

Reconnaître : une droite qui passe par l'origine

Représentée graphiquement, une situation proportionnelle donne toujours une droite passant par l'ORIGINE — car zéro de l'une correspond à zéro de l'autre. Tout autre tracé signale une situation qui ne l'est pas. Le contre-exemple à retenir tient en deux figures : le périmètre d'un carré est proportionnel à son côté, mais son AIRE ne l'est pas, puisque doubler le côté quadruple l'aire.



La bleue est une droite : c'est proportionnel. La rose se redresse : elle ne l'est pas.

Le coefficient se lit sur une seule colonne

Dans un tableau de proportionnalité, le coefficient s'obtient en divisant une valeur de la seconde ligne par celle qui la surmonte. Si $4 \rightarrow 28$, le coefficient vaut $28 \div 4 = 7$, et il permet alors de compléter n'importe quelle autre colonne. Un seul couple suffit donc à connaître toute la situation — c'est précisément ce qui distingue la proportionnalité d'une simple régularité.

quantité	4	6	
prix (€)	28	?	

Le coefficient vaut 7 : les cases manquantes sont 42 et 70.

La quatrième proportionnelle : le produit en croix

Quand trois valeurs d'un tableau sont connues, la quatrième se trouve par le produit en croix. De $\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$, on tire $6x = 4 \times 9$, donc $x = 6$. C'est le même outil que le coefficient, en plus court quand celui-ci ne tombe pas juste — et il évite alors les arrondis intermédiaires, qui faussent le résultat.

on connaît	on cherche
$4 / 6 = x / 9$	$6x = 36$
on divise	$x = 6$

les produits en croix sont égaux

On multiplie en diagonale, puis on divise par le nombre restant.

Un pourcentage est un coefficient déguisé

Calculer $p\%$ d'un nombre, c'est le multiplier par $\frac{p}{100}$: 20% de 150 vaut $150 \times 0,20 = 30$. En sens inverse, exprimer une part en pourcentage revient à diviser la part par le total, puis à multiplier par 100 : 12 élèves sur 25 font $\frac{12}{25} \times 100 = 48\%$.  Un pourcentage n'a de sens que RAPPORTÉ à son total ; « 30% de 200 » ne vaut pas 30, mais 60.

calcul	on fait	résultat
20 % de 150	$\times 0,20$	30
12 sur 25	$\div 25$ $\times 100$	48 %
30 % de 200	$\times 0,30$	60

jamais 30

Le pourcentage ne dit rien tout seul : il faut savoir de QUOI il est le pourcentage.

Une évolution est une multiplication

Augmenter de 25% , ce n'est pas ajouter 25 : c'est multiplier par $1 + 0,25 = 1,25$. Diminuer de 20% , c'est multiplier par $1 - 0,20 = 0,80$. Ce nombre s'appelle le coefficient multiplicateur, et il transforme un raisonnement en deux étapes en une seule opération. Un prix de 80 € augmenté de 25% vaut donc $80 \times 1,25 = 100$ €.

évolution	coefficient
+ 25 %	$\times 1,25$
- 20 %	$\times 0,80$
+ 100 %	$\times 2$
- 50 %	$\times 0,50$

on part toujours de 1

Un coefficient supérieur à 1 fait monter ; inférieur à 1, il fait descendre.

Deux évolutions se MULTIPLIENT, jamais ne s'additionnent

C'est le piège central du chapitre, et le seul contenu que la 4e n'aborde pas. Enchaîner deux évolutions revient à multiplier leurs coefficients. Une hausse de 20% suivie d'une baisse de 20% donne $1,20 \times 0,80 = 0,96$: le prix a perdu 4% , il n'est pas revenu à son point de départ. De même, $+10\%$ puis $+20\%$ donne $1,10 \times 1,20 = 1,32$, soit $+32\%$ et non $+30\%$.

enchaînement	le calcul
+20 % puis -20 %	$1,20 \times 0,80$
+10 % puis +20 %	$1,10 \times 1,20$
-50 % puis +50 %	$0,50 \times 1,50$

les pourcentages ne s'ajoutent pas

La baisse porte sur un prix DÉJÀ augmenté : elle enlève donc davantage.

La vitesse moyenne, un rapport qui porte un nom

La vitesse moyenne est le quotient de la distance par la durée : $v = \frac{d}{t}$

. Une voiture parcourant 180 km en 3 h roule donc à 60 km/h. L'unité le dit d'ailleurs elle-même —

« kilomètres PAR heure » est une division écrite en toutes lettres. Les deux autres formules s'en déduisent sans rien apprendre de plus : $d = v \times t$, et $t = \frac{d}{v}$.

durée (h)	1	2	
distance (km)	60	120	

À vitesse constante, la distance est proportionnelle au temps : la case vaut 180.

Débit et densité suivent exactement la même logique

Un débit est un volume divisé par une durée : 24 L en 4 min font 6 L/min. Une densité est une quantité divisée par une surface : 300 arbres sur 6 hectares font 50 arbres par hectare. Dans les trois cas — vitesse, débit, densité — l'unité contient un « par » qui indique la division, et la grandeur obtenue est le coefficient de proportionnalité entre les deux autres.

grandeur	c'est	un
vitesse	distance ÷ durée	km
débit	volume ÷ durée	L/r
densité	nombre ÷ surface	p: h

le « par » dit la division

L'unité est le mode d'emploi : lire « kilomètres par heure », c'est lire la formule.

La formule : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs

quotients

LES TROIS GRANDEURS QUOTIENTS DU PROGRAMME

$$v = \frac{d}{t} \quad D = \frac{V}{t} \quad d = \frac{N}{S}$$

Trois formules, un seul geste : diviser la grandeur qui varie par celle qui la mesure. ⚠ Et l'unité doit suivre le calcul — des kilomètres divisés par des heures donnent des km/h. Une unité incohérente est le signe le plus sûr d'une division faite à l'envers.

on cherche	on calcule
la vitesse	$d \div t$
la distance	$v \times t$
la durée	$d \div v$

une formule, trois lectures

Les deux dernières se retrouvent depuis la première : rien de plus à apprendre.

Méthode : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

1. Vérifier la proportionnalité avant de l'utiliser

On calcule le rapport sur DEUX colonnes au moins. S'il est le même, la situation est proportionnelle ; s'il diffère, aucune des méthodes du chapitre ne s'applique. Une régularité — ajouter toujours le même nombre — ne suffit pas : elle ne donne pas une droite passant par l'origine.

2. Passer par le coefficient multiplicateur

Pour toute évolution, on écrit d'abord le coefficient : $1 + \frac{p}{100}$ pour une hausse, $1 - \frac{p}{100}$ pour une baisse. Le calcul se fait ensuite en une seule multiplication, et surtout les enchaînements deviennent un simple produit.

3. Ne jamais additionner deux pourcentages

Dès qu'un énoncé enchaîne deux évolutions, on multiplie les coefficients. Le contrôle est immédiat : si le produit dépasse 1, l'ensemble est une hausse ; s'il est inférieur, une baisse — quelle que soit l'apparence des deux taux.

4. Se laisser guider par l'unité

L'unité demandée dit quelle division faire : des km/h se calculent en divisant des kilomètres par des heures. ⚠ Et les unités doivent être cohérentes AVANT le calcul — des minutes mélangées à des heures donnent un résultat faux sans que rien ne le signale.

5. Comparer deux offres par le prix unitaire

Trois cahiers à 6 € ou cinq à 9 € ?
On ramène chacune au prix d'un seul : 2 € contre 1,80 €. C'est la seule comparaison honnête, et c'est encore une grandeur quotient — des euros par cahier.

Selon ce que l'on cherche : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

On me demande si c'est proportionnel

Je calcule le rapport sur deux colonnes différentes. Identiques : oui. Sinon : non, et je le justifie par le contre-exemple.

Il manque une valeur dans un tableau

Je cherche le coefficient sur une colonne complète, ou j'utilise le produit en croix si le coefficient ne tombe pas juste.

On me parle d'une hausse ou d'une baisse

J'écris le coefficient multiplicateur, puis je multiplie. S'il y a deux évolutions, je multiplie les deux coefficients.

L'énoncé mêle une distance et une durée

C'est une vitesse. Je vérifie d'abord la cohérence des unités, puis je divise selon ce que l'unité demandée indique.

On me demande de comparer deux offres

Je ramène chacune à une unité — le prix d'un seul article — et je compare alors.

Exemples corrigés : Proportionnalité, pourcentages et

grandeurs quotients

La hausse suivie de la baisse

Un article coûte 200 €. Son prix augmente de 20 %, puis diminue de 20 %.

Le prix final est-il égal au prix de départ ?

étape	prix
départ	200 €
$\times 1,20$	240 €
$\times 0,80$	192 €

au total : $\times 0,96$

Le prix ne revient pas : il a perdu 4 %.

Non, et le calcul le montre en deux lignes. La hausse multiplie par 1,20 : le prix passe à $200 \times 1,20 = 240$ €. La baisse s'applique alors à CE prix, et non au prix initial : $240 \times 0,80 = 192$ €. Le prix final est donc de 192 €, soit 8 € de moins qu'au départ. On peut aussi le voir d'un coup : $1,20 \times 0,80 = 0,96$, c'est-à-dire une baisse globale de 4 %. La raison est simple à dire — la baisse de 20 % porte sur une somme plus grande que la hausse, donc elle retire davantage qu'elle n'avait ajouté.

La vitesse moyenne

Une voiture parcourt 180 km en 3 h.

Quelle est sa vitesse moyenne ?

L'unité demandée est le km/h, ce qui indique la division à faire : des kilomètres divisés par des heures. On calcule $180 \div 3 = 60$, donc la vitesse moyenne est de 60 km/h. Le contrôle se fait dans l'autre sens : à 60 km/h pendant 3 h, la voiture parcourt $60 \times 3 = 180$ km. C'est bien la distance de départ.

Une part exprimée en pourcentage

Dans une classe de 25 élèves, 12 sont demi-pensionnaires.

Quel pourcentage cela représente-t-il ?

On divise la part par le total, puis on multiplie par 100 : $\frac{12}{25} = 0,48$, donc 48 %. Le contrôle de plausibilité est immédiat — 12 est un peu moins que la moitié de 25, et 48 % est un peu moins que 50 %. Un résultat supérieur à 100 % signalerait qu'on a divisé à l'envers.

Deux offres de cahiers

L'offre A propose 3 cahiers pour 6 €, l'offre B en propose 5 pour 9 €.

Laquelle a le prix unitaire le plus bas ?

On ramène chaque offre au prix d'UN cahier, ce qui est encore une grandeur quotient — des euros par cahier. Pour A : $6 \div 3 = 2$ € l'unité. Pour B : $9 \div 5 = 1,80$ € l'unité. L'offre B est donc la moins chère. ⚠ Comparer les prix totaux — 6 € contre 9 € — n'aurait aucun sens, puisqu'ils ne portent pas sur le même nombre de cahiers.

Pièges à éviter : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

Écrire « 30 % de 200 = 60 ». Un pourcentage se calcule TOUJOURS par rapport au total : $200 \times 0,30 = 60$.

Croire qu'augmenter de 20 % revient à ajouter 20. C'est multiplier par 1,20, et le résultat dépend donc de la valeur de départ.

Additionner deux évolutions : +10 % puis +20 % ne fait pas +30 % mais +32 %, car les coefficients se multiplient.

Croire qu'une hausse annulée par une baisse du même taux ramène au prix initial : $1,20 \times 0,80 = 0,96$, soit 4 % de perte.

Prendre une régularité pour une proportionnalité. Un tableau où l'on ajoute toujours 3 est régulier, mais sa droite ne passe pas par l'origine.

Croire que l'aire d'un carré est proportionnelle à son côté. Doubler le côté quadruple l'aire ; seul le PÉRIMÈTRE est proportionnel.

Mélanger les unités dans un calcul de vitesse : des minutes et des heures dans la même division donnent un résultat faux, sans aucun signal.

À retenir : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

Proportionnel signifie : on multiplie toujours par le même coefficient.

Le graphique d'une situation proportionnelle est une droite passant par l'origine.

p % d'un nombre, c'est ce nombre multiplié par $\frac{p}{100}$.

Augmenter de p % : multiplier par $1 + \frac{p}{100}$. Diminuer : par $1 - \frac{p}{100}$.

Deux évolutions successives se MULTIPLIENT : elles ne s'additionnent jamais.

$v = \frac{d}{t}$, et l'unité km/h dit elle-même la division à faire.

Débit et densité fonctionnent exactement comme la vitesse.

Exercices corrigés : Proportionnalité, pourcentages et grandeurs quotients

1. L'aire d'un carré est-elle proportionnelle à la longueur de son côté ?

Correction :

Non. Un côté de 2 donne une aire de 4, un côté de 4 donne une aire de 16 : le côté a doublé, l'aire a quadruplé. Le rapport n'est pas constant. En revanche le périmètre, lui, est bien proportionnel au côté.

2. Dans un tableau de proportionnalité, $4 \rightarrow 28$. Quel est le coefficient ?

Correction :

$28 \div 4 = 7$. Toutes les autres colonnes s'obtiennent alors en multipliant par 7.

3. Résoudre $\frac{4}{6} = \frac{x}{9}$.

Correction :

Par le produit en croix : $6x = 4 \times 9 = 36$, donc $x = 6$. Contrôle : $\frac{4}{6}$ et $\frac{6}{9}$ valent tous deux $\frac{2}{3}$.

4. Calculer 20 % de 150.

Correction :

$150 \times 0,20 = 30$.

5. Un prix de 80 € augmente de 25 %. Quel est le nouveau prix ?

Correction :

Le coefficient multiplicateur vaut $1 + 0,25 = 1,25$. Donc $80 \times 1,25 = 100$ €.

6. Par quel nombre multiplie-t-on pour diminuer une quantité de 20 % ?

Correction :

Par $1 - 0,20 = 0,80$. Un coefficient inférieur à 1 correspond toujours à une baisse.

7. Un prix augmente de 20 %, puis diminue de 20 %. Revient-il au prix de départ ?

Correction :

Non. Les coefficients se multiplient : $1,20 \times 0,80 = 0,96$. Le prix a donc baissé de 4 % au total, car la baisse s'applique à une somme déjà augmentée.

8. Un robinet remplit 24 L en 4 min. Quel est son débit ?

Correction :

$24 \div 4 = 6$, donc 6 L/min. L'unité indique la division : des litres par minute.

9. Une voiture roule à 80 km/h pendant 2,5 h. Quelle distance parcourt-elle ?

Correction :

$d = v \times t = 80 \times 2,5 = 200$ km. Contrôle : $200 \div 2,5 = 80$, on retrouve bien la vitesse.

10. Une zone compte 300 arbres sur 6 hectares. Quelle est la densité ?

Correction :

$300 \div 6 = 50$, donc 50 arbres par hectare. C'est une grandeur quotient, comme la vitesse et le débit.