

Puissances et écriture scientifique

cours et exercices corrigés de maths 3e

La Terre et la Lune sont séparées d'environ 384 000 kilomètres, et un virus mesure 0,000 000 1 mètre. Écrire ces deux nombres à la main est pénible et se relit mal : on compte les zéros du doigt. Les puissances de dix règlent la question — $3,84 \times 10^5$ et 10^{-7} — et rendent d'un coup d'œil comparable ce qui ne l'était pas.

L'ÉCRITURE

a^n , c'est a multiplié n fois par lui-même

LE MOT

n s'appelle l'exposant ; a est la base

LE PIÈGE

2^3 vaut 8, jamais 6 : ce n'est pas 2×3

À quoi ça sert : Puissances et écriture scientifique

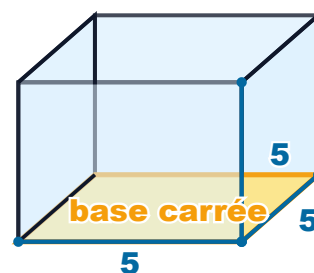
Tout ce qui est très grand ou très petit se dit en puissances de dix. La distance Terre-Lune vaut environ $3,84 \times 10^5$ kilomètres, le diamètre d'un virus 10^{-7} mètre, et le disque d'un ordinateur se compte en 10^{12} octets. L'intérêt n'est pas d'écrire plus court, il est de COMPARER : entre 10^{-7} et 10^{-9} , l'œil voit immédiatement un facteur cent, là où « 0,000 000 1 » et « 0,000 000 001 » demandent de compter les zéros deux fois. À La Réunion, le piton de la Fournaise culmine à $2,63 \times 10^3$ mètres — et le fond marin qui le porte descend à 4×10^3 mètres sous la surface : la montagne est donc bien plus haute qu'elle n'en a l'air.

Un peu d'histoire : Puissances et écriture scientifique

Vers 250 avant notre ère, Archimède écrit « L'Arénaire » pour répondre à une question qui paraissait absurde : combien de grains de sable faudrait-il pour remplir l'univers ? Le problème n'était pas de compter, mais d'ÉCRIRE le résultat — la numération grecque s'arrêtait à la myriade, dix mille. Archimède invente donc un système d'ordres successifs, chacun étant la myriade de myriades du précédent, et parvient à exprimer un nombre que nous noterions 10^{63} . C'est le premier texte connu qui traite les très grands nombres comme des objets manipulables plutôt que comme un infini vague. L'écriture a^n , elle, ne viendra qu'avec Descartes en 1637.

Définition : Puissances et écriture scientifique

Pour un nombre a et un entier n supérieur ou égal à 1, la puissance a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a : $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$. Le nombre a s'appelle la base, et n l'exposant. On lit « 5 exposant 3 », ou « 5 au cube ». Deux cas particuliers se retiennent : $a^1 = a$, et $a^0 = 1$ pour tout a non nul.

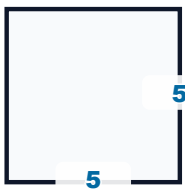


Le mot « cube » n'est pas une image : 5^3 EST le volume de ce cube, dont les trois dimensions valent 5. C'est pourquoi 2^3 ne peut pas valoir 6 — un cube compte ses unités dans trois directions, pas dans une.

Propriétés : Puissances et écriture scientifique

Carré et cube : les mots viennent des figures

5^2 se lit « 5 au carré » parce que c'est exactement l'aire d'un carré de côté 5 : $5 \times 5 = 25$. De même 5^3 est le volume d'un cube de côté 5. Au-delà de 3, il n'y a plus de figure et l'on dit simplement « exposant 4 ». Retenir cette origine évite la confusion avec la multiplication : 2^3 compte des cubes, pas des paires.



Deux côtés de 5, et l'aire vaut 5 fois 5 : c'est 5^2 .

Calculer une puissance, et surveiller le signe

On écrit le produit en entier, puis on calcule : $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. Quand la base est négative, elle s'écrit ENTRE PARENTHÈSES, et le signe du résultat dépend de la parité de l'exposant : un nombre pair de facteurs négatifs donne un résultat positif, un nombre impair un résultat négatif. Ainsi $(-2)^2 = 4$ mais $(-2)^3 = -8$.

écriture	produit	résultat
2^3	$2 \times 2 \times 2$	8
$(-2)^2$	$(-2) \times (-2)$	4
$(-2)^3$	$(-2)^3$ en entier	-8

exposant pair : résultat positif

Écrire $(-2)^2 = -4$ est faux : deux facteurs négatifs donnent un produit positif.

Les puissances de dix se comptent en zéros

10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros : $10^3 = 1\,000$. L'exposant EST le nombre de zéros, ce qui rend ces puissances immédiates. Un exposant négatif fait l'inverse : $10^{-2} = 0,01$, c'est-à-dire un 1 placé à la deuxième décimale. Multiplier par 10^n déplace la virgule de n rangs vers la droite, et par 10^{-n} de n rangs vers la gauche.

puissance	écriture décimale
10^3	1 000
10^1	10
10^0	1
10^{-2}	0,01

l'exposant compte les rangs

En descendant d'un exposant, on divise par 10 — et cela continue sous zéro.

L'écriture scientifique : un seul chiffre avant la virgule

Un nombre est en écriture scientifique lorsqu'il s'écrit $a \times 10^n$ où a possède UN SEUL chiffre non nul avant la virgule — autrement dit $1 \leq a < 10$ — et où n est un entier relatif. Ainsi $5\,600 = 5,6 \times 10^3$. L'écriture 42×10^3 désigne le même genre de nombre mais n'est PAS scientifique, car 42 en a deux. Cette contrainte n'est pas un caprice : elle rend l'écriture unique, donc deux nombres comparables d'un coup d'œil.

écriture	scientifique ?
$5,6 \times 10^3$	oui
42×10^3	non : $42 \geq 10$
$0,56 \times 10^4$	non : $0,56 < 1$
4×10^{-3}	oui

un seul chiffre avant la virgule

La règle porte sur a seul : l'exposant, lui, peut être négatif.

Multiplier, diviser, élever encore

Trois règles suffisent, et toutes se retrouvent en comptant les facteurs. Pour un produit de MÊME base, les exposants s'ajoutent : $a^3 \times a^4 = a^7$, parce qu'il y a 3 puis 4 facteurs, donc 7 en tout. Pour un quotient, ils se soustraient : $\frac{a^5}{a^2} = a^3$. Et une puissance de puissance les multiplie : $(a^2)^3 = a^6$, car on prend trois fois deux facteurs.

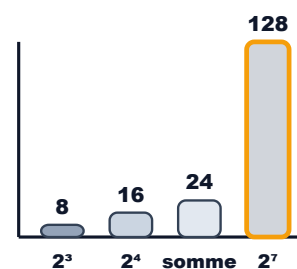
opération	règle	ex
produit	on ajoute	a
quotient	on soustrait	a
puissance	on multiplie	(;

même base, toujours

— La base ne change JAMAIS : écrire $2^2 \times 2^3 = 4^5$ revient à la multiplier aussi.

Pourquoi l'addition ne suit aucune règle

Les trois règles précédentes valent pour la multiplication et la division. L'addition, elle, n'en a aucune : $2^3 + 2^4$ ne vaut ni 2^7 ni 4^7 . On ne peut que calculer chaque terme — $8 + 16 = 24$ — alors que 2^7 vaut 128. L'écart est tel qu'aucune règle ne pourrait les rapprocher, et le diagramme le montre mieux qu'un raisonnement.



La somme atteint 24 quand 2^7 vaut 128 : cinq fois plus.

Et une égalité qui, elle, est vraie

Toutes les égalités surprenantes ne sont pas fausses. $2^3 \times 3^3 = 6^3$ est EXACTE : les bases diffèrent, mais l'exposant est commun, et l'on peut alors regrouper les bases — $8 \times 27 = 216$, qui est bien 6^3 .

Répondre « non » par réflexe à toute question de cette forme est donc une mauvaise stratégie : c'est la structure de l'écriture qu'il faut regarder, pas son air suspect.

égalité	vraie ?
$2^2 \times 2^3 = 2^5$	oui : même base
$2^3 \times 3^3 = 6^3$	oui : même exposant
$2^2 \times 2^3 = 4^5$	non
$10^3 + 10^2 = 10^5$	non

regarder ce qui est commun

Même base, on ajoute les exposants ; même exposant, on peut multiplier les bases.

La formule : Puissances et écriture scientifique

L'ÉCRITURE SCIENTIFIQUE D'UN NOMBRE

$$a \times 10^n \quad \text{avec} \quad 1 \leq a < 10$$

Le nombre a porte les chiffres significatifs, l'exposant n porte l'ordre de grandeur. La condition sur a rend l'écriture **UNIQUE** : sans elle, 5 600 pourrait s'écrire 56×10^2 , $5,6 \times 10^3$ ou $0,56 \times 10^4$, et deux nombres ne se compareraient plus d'un coup d'œil.

nombre	écriture scientifique
5 600	$5,6 \times 10^3$
384 000	$3,84 \times 10^5$
0,004	4×10^{-3}

un seul chiffre devant la virgule

On déplace la virgule jusqu'à n'avoir qu'un chiffre devant, et l'exposant compte les rangs franchis.

Méthode : Puissances et écriture scientifique

1. Devant une puissance : écrire le produit

Tant que l'exposant est petit, on écrit les facteurs. C'est plus long de trois secondes et cela interdit l'erreur $2^3 = 6$, qui vient toujours d'avoir calculé de tête sans regarder ce que l'écriture demandait.

2. Avant d'appliquer une règle : vérifier ce qui est commun

Les exposants ne s'ajoutent QUE si la base est la même. On regarde donc d'abord les bases : identiques, on applique la règle ; différentes, on vérifie si c'est l'exposant qui est commun ; ni l'un ni l'autre, on calcule chaque puissance séparément.

3. Passer en écriture scientifique

On place la virgule juste après le premier chiffre non nul. Puis on compte les rangs franchis : vers la gauche l'exposant est positif, vers la droite il est négatif. Contrôle immédiat — le nombre a obtenu doit être compris entre 1 et 10.

4. Contrôler par l'ordre de grandeur

Avant d'écrire un résultat, on se demande s'il est plausible : $3,84 \times 10^5$ vaut quelques centaines de milliers. Une erreur d'un rang se voit alors tout de suite, alors qu'elle passe inaperçue dans une suite de zéros.

Selon ce que l'on cherche : Puissances et écriture scientifique

On me demande de calculer une puissance

J'écris le produit des facteurs, puis je calcule. Si la base est négative, je la mets entre parenthèses et je regarde la parité de l'exposant.

On me demande de simplifier un produit de puissances

Je vérifie que la base est la même, puis j'ajoute les exposants. La base, elle, ne bouge pas.

On me donne un grand ou un petit nombre

Je le passe en écriture scientifique : un seul chiffre avant la virgule, et l'exposant compte les rangs déplacés.

On me donne une écriture scientifique

Je fais l'inverse : je déplace la virgule de n rangs, vers la droite si l'exposant est positif, vers la gauche s'il est négatif.

On me demande si une égalité est vraie

Je regarde ce qui est commun — la base, ou l'exposant — et je calcule les deux membres si je doute. Une addition de puissances se calcule toujours terme à terme.

Exemples corrigés : Puissances et écriture scientifique

La distance Terre-Lune

La Lune est à environ 384 000 kilomètres de la Terre.

Écrire cette distance en écriture scientifique.

étape	écriture
départ	384 000
virgule placée	3,84
rangs comptés	$3,84 \times 10^5$

cinq rangs vers la droite

L'exposant compte les rangs, pas les zéros du nombre de départ.

On place la virgule juste après le premier chiffre non nul, le 3 : cela donne 3,84. On compte ensuite les rangs franchis pour revenir au nombre de départ — de 3,84 à 384 000, la virgule se déplace de cinq rangs vers la droite — donc l'exposant vaut 5. La distance s'écrit $3,84 \times 10^5$ kilomètres. Contrôle : 3,84 est bien compris entre 1 et 10, l'écriture est donc scientifique.

Un produit de puissances

L'expression $2^2 \times 2^3$.

L'écrire sous la forme d'une seule puissance, puis la calculer.

Les deux bases sont égales à 2 : les exposants s'ajoutent, donc $2^2 \times 2^3 = 2^5$. On calcule ensuite : $2^5 = 32$. Le contrôle direct confirme — $4 \times 8 = 32$. Écrire 4^5 serait faux : cela reviendrait à multiplier aussi les bases, alors que la règle ne touche qu'aux exposants.

Un nombre plus petit que 1

Le nombre 0,004.

L'écrire en écriture scientifique.

Le premier chiffre non nul est le 4 ; on place la virgule juste après, ce qui donne simplement 4. Pour revenir à 0,004, il faut déplacer la virgule de trois rangs vers la GAUCHE : l'exposant est donc négatif, et vaut -3 . Le nombre s'écrit 4×10^{-3} . Contrôle : $10^{-3} = 0,001$, et $4 \times 0,001 = 0,004$.

Deux égalités, une vraie et une fausse

Un élève écrit $10^3 + 10^2 = 10^5$, puis $2^3 \times 3^3 = 6^3$.

Qu'en penser ?

La première est FAUSSE. Aucune règle ne concerne l'addition : il faut calculer chaque terme, $1\,000 + 100 = 1\,100$, alors que 10^5 vaut 100 000. Le résultat annoncé est donc près de cent fois trop grand — l'erreur n'est pas légère. La seconde est VRAIE. Les bases diffèrent, mais l'exposant est commun : on peut alors regrouper les bases, et $2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3 = 6^3$. Vérification chiffrée : $8 \times 27 = 216$, et $6^3 = 216$. La leçon tient en une phrase : ce n'est pas l'allure de l'égalité qui décide, c'est ce qui y est commun.

Pièges à éviter : Puissances et écriture scientifique

Écrire $2^3 = 6$. Une puissance n'est pas une multiplication par l'exposant : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

Écrire $(-2)^2 = -4$. Deux facteurs négatifs donnent un produit positif : le résultat est $+4$. En revanche $(-2)^3 = -8$.

Écrire $2^2 \times 2^3 = 4^5$. Seuls les exposants s'ajoutent ; la base reste 2, donc 2^5 .

Écrire $10^3 + 10^2 = 10^5$. Les règles ne valent que pour la multiplication et la division — une somme se calcule terme à terme.

Présenter 42×10^3 comme une écriture scientifique. Il faut UN SEUL chiffre non nul avant la virgule, donc $4,2 \times 10^4$.

Répondre « non » à toute égalité qui surprend : $2^3 \times 3^3 = 6^3$ est vraie, car l'exposant y est commun.

Confondre le nombre de zéros et l'exposant pour un nombre qui n'est pas une puissance de dix : 384 000 ne s'écrit pas 384×10^3 en écriture scientifique.

À retenir : Puissances et écriture scientifique

a^n est le produit de n facteurs égaux à a — et $a^0 = 1$.

5^2 est l'aire d'un carré de côté 5 ; 5^3 le volume d'un cube de côté 5.

10^n s'écrit avec un 1 suivi de n zéros ; 10^{-n} place le 1 au n -ième rang décimal.

Même base : les exposants s'ajoutent pour un produit, se soustraient pour un quotient.

$(a^m)^n = a^{m \times n}$ — on multiplie les exposants.

Une écriture scientifique s'écrit $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

L'addition de deux puissances n'obéit à aucune règle : on calcule chaque terme.

Exercices corrigés : Puissances et écriture scientifique

1. Que signifie l'écriture 5^3 ? Calculer sa valeur.

Correction :

Elle signifie le produit de trois facteurs égaux à 5 : $5 \times 5 \times 5$, ce qui vaut 125. Le 3 s'appelle l'exposant, le 5 la base.

2. Calculer $(-2)^3$.

Correction :

$(-2) \times (-2) \times (-2)$. Les deux premiers donnent +4, que l'on multiplie par -2 : le résultat est -8 . L'exposant est impair, donc le résultat est négatif.

3. Combien de zéros compte l'écriture décimale de 10^6 ?

Correction :

Six : $10^6 = 1\,000\,000$. L'exposant donne directement le nombre de zéros qui suivent le 1.

4. Que vaut 10^{-2} ?

Correction :

0,01. Un exposant négatif place le 1 au deuxième rang après la virgule — c'est aussi $\frac{1}{100}$.

5. Simplifier $a^3 \times a^4$, avec a non nul.

Correction :

La base est la même, donc les exposants s'ajoutent : a^7 . On le retrouve en comptant les facteurs — trois puis quatre font sept.

6. Simplifier $\frac{a^5}{a^2}$, avec a non nul.

Correction :

Les exposants se soustraient : $a^{5-2} = a^3$. Deux des cinq facteurs du numérateur se simplifient avec ceux du dénominateur.

7. Simplifier $(a^2)^3$.

Correction :

On prend trois fois un bloc de deux facteurs, soit six facteurs : a^6 . Les exposants se multiplient.

8. Écrire 5 600 en écriture scientifique.

Correction :

On place la virgule après le 5 : 5,6. Il faut trois rangs vers la droite pour retrouver 5 600, donc $5,6 \times 10^3$.

9. Pourquoi 42×10^3 n'est-il pas une écriture scientifique ?

Correction :

Parce que 42 n'est pas compris entre 1 et 10 : il porte deux chiffres avant la virgule. L'écriture correcte est $4,2 \times 10^4$ — on a déplacé la virgule d'un rang, donc l'exposant a augmenté d'une unité.

10. Expliquer pourquoi $2^3 \times 2^4 = 2^7$, mais $2^3 + 2^4$ n'est pas égal à 2^7 .

Correction :

Dans le produit, on met bout à bout trois facteurs puis quatre facteurs : il y en a bien sept au total, d'où 2^7 . Dans la somme, rien ne se met bout à bout — on additionne deux résultats déjà calculés, $8 + 16 = 24$, alors que 2^7 vaut 128. Aucune règle ne relie les exposants d'une addition.