

Puissances et notation scientifique — cours de maths 4e

Écrire 1 000 000 000, le lire, le comparer à 5 000 000 : c'est long, et on se trompe en comptant les zéros. Les puissances raccourcissent l'écriture, et la notation scientifique donne à chaque nombre une forme unique — un seul chiffre avant la virgule, et une puissance de 10 qui dit la taille. C'est l'outil des sciences autant que des mathématiques.

LE MOT DE 4E

Exposant : il **COMPTE** les **facteurs**, il n'en est pas un

LA FORME UNIQUE

$a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$

LE PIÈGE

2^{-3} est **POSITIF** : c'est un **inverse**, pas un opposé

À quoi ça sert : Puissances et notation scientifique

La notation scientifique est née du besoin d'écrire ce qui ne tient pas sur une ligne. Un globule rouge mesure 7×10^{-6} m ; la Terre-Lune fait $3,8 \times 10^5$ km ; le Piton des Neiges culmine à $3,1 \times 10^3$ m. À La Réunion, le cyclone Hyacinthe a déversé en 1980 près de 6×10^3 mm de pluie en quinze jours à Commerson — record mondial. Personne n'écrit ces nombres en toutes lettres : on écrit la mantisse, et la puissance de 10 dit la taille. Un disque dur d'un téraoctet, c'est 10^{12} octets, et une seconde de son échantillonné en compte $4,4 \times 10^4$.

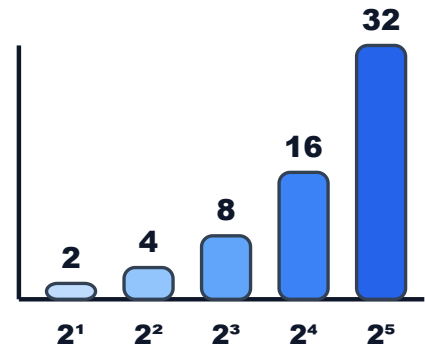
Un peu d'histoire : Puissances et notation scientifique

L'écriture avec un petit chiffre en haut est de René Descartes, en 1637, dans « La Géométrie ». Avant lui on écrivait « cubus » ou on répétait la lettre : Viète notait « A quadratum » ce que nous notons A^2 . Descartes n'a d'abord utilisé ses exposants que pour les puissances entières positives ; c'est Wallis, puis Newton, qui ont étendu l'écriture aux exposants négatifs vers 1660, en remarquant justement que descendre l'échelle des exposants revient à diviser — le raisonnement du tableau de cette fiche. La notation scientifique, elle, s'est imposée au XXe siècle avec l'astronomie et la physique atomique, deux sciences qui manipulent des nombres que la main ne peut plus écrire.

Définition : Puissances et notation scientifique

Une puissance résume une multiplication répétée d'un même nombre : a^n , c'est a écrit n fois en

facteur. Le nombre a s'appelle la BASE, le petit nombre en haut s'appelle l'EXPOSANT. Ainsi $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. Un exposant négatif désigne l'inverse de la puissance : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

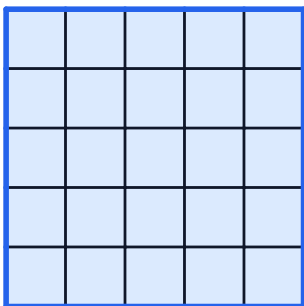


À chaque marche on multiplie par 2. C'est pour ça qu'une puissance grandit si vite : 2^5 vaut déjà 32, alors que 2×5 n'en ferait que 10.

Propriétés : Puissances et notation scientifique

Pourquoi on dit « au carré »

5^2 n'est pas une abstraction : c'est un carré de 5 sur 5, et on peut compter ses cases. Il y en a 25. De la même façon, 5^3 est le nombre de petits cubes d'un cube de 5 d'arête — d'où le mot « au cube ».



$5^2 = 25$ cases, et le carré est un vrai carré

L'exposant compte, il ne multiplie pas

C'est l'erreur la plus fréquente, et elle se dit en une phrase : 3^2 ne vaut pas 6. L'exposant dit COMBIEN DE FOIS la base apparaît en facteur, il n'est pas lui-même un facteur. $3^2 = 3 \times 3 = 9$.

Données	écriture	qu'on écrit
	3^2	3
	3×2	3

deux écritures voisines, deux nombres différents

Les parenthèses décident du signe

Dans $(-2)^3$, les parenthèses enferment le signe : c'est (-2) qui est répété, et trois facteurs négatifs donnent un résultat négatif. Dans -2^3 , la puissance ne porte que sur 2, et le signe reste devant. Ici les deux valent -8 — mais avec un exposant PAIR, ils diffèrent : $(-2)^2 = 4$ et $-2^2 = -4$.

Données	écriture	pr
	$(-2)^2$	(-
	-2^2	-(-

avec un exposant pair, le signe change tout

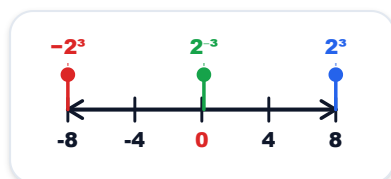
Un exposant négatif n'est pas un nombre négatif

Pour 10, l'exposant compte les zéros

C'est ce qui rend les puissances de 10 si commodes : 10^5 , c'est 1 suivi

La notation scientifique donne une forme unique

2^{-3} vaut $\frac{1}{8}$, c'est-à-dire 0,125 : un nombre POSITIF, plus petit que 1. L'exposant négatif annonce un inverse, jamais un opposé. Posés sur la droite graduée, 2^3 et 2^{-3} sont du même côté de zéro — c'est -2^3 qui part à gauche.



2^{-3} est à DROITE de zéro, tout près de lui

de cinq zéros. Et en sens inverse, 10^{-3} donne trois chiffres après la virgule : 0,001. Multiplier par 10^n décale la virgule de n rangs vers la droite.

Données	puissance
	10^2
	10^5
	10^0
	10^{-3}

$10^0 = 1$: aucun zéro à écrire

Un nombre s'écrit d'une infinité de façons avec des puissances de 10. La notation scientifique en choisit UNE : $a \times 10^n$, avec un seul chiffre non nul avant la virgule, c'est-à-dire $1 \leq a < 10$. Deux nombres écrits ainsi se comparent alors d'un coup d'œil.

Données	écriture de 12 500	ma
	125×10^2	
	$12,5 \times 10^3$	
	$1,25 \times 10^4$	
	$0,125 \times 10^5$	

quatre écritures du même nombre, une seule scientifique

La formule : Puissances et notation scientifique

POUR TOUT NOMBRE A NON NUL ET TOUT ENTIER N

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \text{ (n facteurs) et } a^{-n} = 1 / a^n$$

Descendre d'un exposant, c'est diviser par la base. Le tableau le montre sans rien à admettre : après $2^1 = 2$ vient $2^0 = 1$, puis $2^{-1} = 0,5$. La convention $a^0 = 1$ n'est pas arbitraire, elle prolonge la division.

Données	puissance	on divise par 2	valeur
	2^3		8
	2^2	$\div 2$	4
	2^1	$\div 2$	2
	2^0	$\div 2$	1
	2^{-1}	$\div 2$	0,5

descendre d'un exposant, c'est diviser par la base

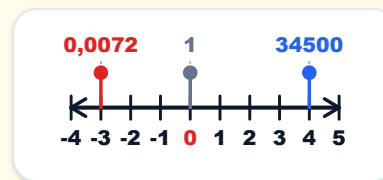
Méthode : Puissances et notation scientifique

1. Calculer une puissance

On écrit le produit en entier, puis on calcule pas à pas. $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$. Si la base est négative, on compte les facteurs négatifs : un nombre PAIR de facteurs donne un résultat positif, un nombre IMPAIR le laisse négatif.

2. Passer en notation scientifique

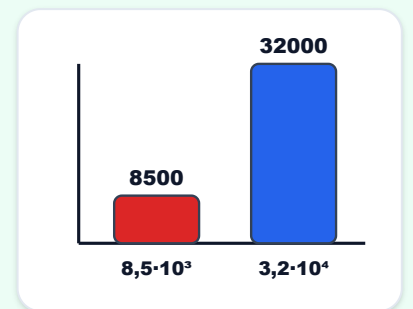
On place la virgule juste après le premier chiffre non nul, puis on compte de combien de rangs elle s'est déplacée : c'est l'exposant. Vers la gauche il est positif, vers la droite il est négatif. 34 500 donne $3,45 \times 10^4$; 0,0072 donne $7,2 \times 10^{-3}$.



l'axe des EXPOSANTS : à gauche les petits, à droite les grands

3. Comparer deux écritures scientifiques

L'exposant décide d'abord : la mantisse étant toujours entre 1 et 10, elle ne peut pas rattraper une puissance de 10 de plus. On ne compare les mantisses que si les exposants sont ÉGAUX. Ainsi $8,5 \times 10^3$ est plus petit que $3,2 \times 10^4$, malgré une mantisse plus grande.



la plus grande mantisse ne fait pas le plus grand nombre

4. Calculer avec des puissances

On calcule chaque puissance séparément, puis on effectue l'opération. $2^3 + 4^2 = 8 + 16 = 24$. Pour un produit de puissances de 10, on écrit les deux nombres et on compte les zéros : $10^3 \times 10^2 = 1\,000 \times 100 = 100\,000$, soit cinq zéros.

Données	calcul	chaque puissance
	$2^3 + 4^2$	8 + 16 = 24
	$10^3 \times 10^2$	1000 × 100 = 100 000
	$3^2 \times 10^2$	9 × 100 = 900

on calcule d'abord, on opère ensuite

Selon ce que l'on cherche : Puissances et notation scientifique

Le nombre est très grand

On passe en notation scientifique :
la mantisse donne la précision,
l'exposant donne la taille.
 $1\,500\,000\,000 = 1,5 \times 10^9$.

Le nombre est très petit

Même méthode, exposant négatif.
 $0,000\,004 = 4 \times 10^{-6}$. ⚠ Le
nombre reste positif : c'est sa
TAILLE qui est petite, pas son
signe.

On doit comparer deux tailles

On écrit les deux en notation
scientifique, et on regarde les
exposants. C'est le seul cas où l'on
peut conclure sans calculer.

Quelque chose double, ou triple, à chaque étape

C'est une puissance de 2 ou de 3,
pas une multiplication. Doubler 10
fois multiplie par $2^{10} = 1\,024$, pas
par 20.

Exemples corrigés : Puissances et notation scientifique

Écrire un grand nombre en notation scientifique

Le nombre 34 500.

L'écrire en notation scientifique.

On place la virgule après le premier chiffre : 3,45. Elle
s'est déplacée de 4 rangs vers la gauche, donc
l'exposant est 4. Réponse : $3,45 \times 10^4$. ⚠
 $34,5 \times 10^3$ vaut le même nombre, mais n'est PAS la
notation scientifique : sa mantisse dépasse 10.

Un exposant négatif

Le nombre 2^{-3} .

L'écrire sous forme de fraction, puis en décimal.

Données	écriture	ce que ça vaut
	2^{-3}	$1/8 = 0,125$
	-2^3	-8

**deux écritures qu'on confond, deux
nombres opposés de nature**

L'exposant négatif désigne l'inverse : $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.
En décimal, $1 \div 8 = 0,125$. Réponse : $\frac{1}{8}$, soit 0,125

— un nombre positif, plus petit que 1.

La colonie de bactéries

Une colonie compte 5 bactéries et double chaque heure.

Combien en compte-t-elle après 8 heures ?

Doubler 8 fois, c'est multiplier par 2^8 . Or $2^8 = 256$.

Calcul : $5 \times 256 = 1\,280$ bactéries. ⚠ L'erreur classique est d'écrire $5 \times 2 \times 8 = 80$. Doubler n'AJOUTE pas huit fois, il MULTIPLIE huit fois.

Pièges à éviter : Puissances et notation scientifique

Confondre 3^2 et 3×2 . L'exposant COMPTE les facteurs, il n'en est pas un : $3^2 = 9$, pas 6.

Croire qu'un exposant négatif donne un nombre négatif. $2^{-3} = 0,125$ est POSITIF. Le négatif porte sur l'exposant, pas sur le nombre.

Oublier les parenthèses : $(-2)^2 = 4$ mais $-2^2 = -4$. Ce ne sont pas deux façons d'écrire la même chose.

Écrire $12,5 \times 10^3$ en croyant faire de la notation scientifique. La mantisse doit être comprise entre 1 (inclus) et 10 (exclu).

Comparer deux écritures scientifiques par leur mantisse. C'est l'EXPOSANT qui décide d'abord — $8,5 \times 10^3 < 3,2 \times 10^4$.

Écrire $a^0 = 0$. C'est 1, et le tableau de l'échelle des exposants montre pourquoi : on divise par la base à chaque marche.

À retenir : Puissances et notation scientifique

$a^n = a \times a \times \dots \times a$, avec n facteurs. La base est répétée, l'exposant les compte.

$a^0 = 1$ et $a^1 = a$, pour tout nombre a non nul.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$: un exposant négatif désigne un INVERSE, jamais un opposé.

Pour les puissances de 10, l'exposant compte les zéros : $10^5 = 100\,000$ et $10^{-3} = 0,001$.

Notation scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$. Un seul chiffre non nul avant la virgule.

Pour comparer deux écritures scientifiques : l'exposant d'abord, la mantisse seulement s'ils sont égaux.

Exercices corrigés : Puissances et notation scientifique

1. Écrire 4^3 sous forme de produit, puis calculer.

Correction :

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

2. Calculer $(-3)^2$ puis -3^2 .

Correction :

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$: deux facteurs négatifs, résultat positif. $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$: la puissance ne porte que sur 3.

3. Écrire 5^{-2} sous forme de fraction.

Correction :

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}, \text{ soit } 0,04.$$

4. Combien vaut 10^6 ? Et 10^{-4} ?

Correction :

$10^6 = 1\,000\,000$ (1 suivi de six zéros). $10^{-4} = 0,0001$ (quatre chiffres après la virgule).

5. Écrire 0,000 82 en notation scientifique.

Correction :

On place la virgule après le 8 : 8,2. Elle s'est déplacée de 4 rangs vers la droite, donc l'exposant est -4 . Réponse : $8,2 \times 10^{-4}$.

6. Ranger dans l'ordre croissant : $6,1 \times 10^3$, $2,4 \times 10^5$, $9,8 \times 10^3$.

Correction :

Les deux premiers exposants valent 3, le dernier 5. Entre les deux écritures en 10^3 , on compare les mantisses : $6,1 < 9,8$. Réponse : $6,1 \times 10^3 < 9,8 \times 10^3 < 2,4 \times 10^5$.

7. Calculer $10^4 \times 10^2$, en écrivant les deux nombres.

Correction :

$10\,000 \times 100 = 1\,000\,000$. Le résultat porte $4 + 2 = 6$ zéros, donc 10^6 .

8. On plie une feuille en deux, 10 fois de suite. Combien d'épaisseurs obtient-on ?

Correction :

Chaque pliage double : $2^{10} = 1\,024$ épaisseurs. ⚠ Ce n'est pas $2 \times 10 = 20$.