

Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

cours et exercices corrigés de maths 3e

En quatrième, le théorème de Pythagore servait à CALCULER une longueur qu'on ne pouvait pas mesurer. En troisième, il sert aussi à DÉMONTRER — prouver qu'un angle est droit sans jamais poser d'équerre — et surtout à l'écrire comme le brevet l'attend. Car le calcul juste ne suffit plus : c'est la phrase qui l'entoure qui est notée.

LE THÉORÈME

Rectangle $\Rightarrow$ le carré de l'hypoténuse est la somme des deux autres

LA RÉCIPROQUE

L'égalité des carrés $\Rightarrow$ le triangle est rectangle

LE PIÈGE

Le direct ne PROUVE jamais qu'un triangle est rectangle

À quoi ça sert : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

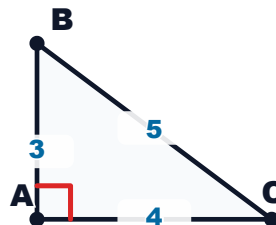
La réciproque est l'outil des gens qui construisent. Pour tracer un angle droit sur un chantier sans équerre — et une équerre de menuisier est bien trop petite pour une dalle —, on mesure trois mètres sur un mur, quatre mètres sur l'autre, et l'on ajuste jusqu'à ce que la diagonale fasse exactement cinq mètres. L'angle est alors droit, garanti par le théorème. La méthode est si ancienne qu'on l'appelle « la corde à treize nœuds » : douze intervalles égaux, repliés en $3 + 4 + 5$, donnent un angle droit sans aucun instrument. Les bâtisseurs de cathédrales s'en servaient, et les maçons aussi.

Un peu d'histoire : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

Le résultat porte le nom de Pythagore, au VI^e siècle avant notre ère, mais il lui est très antérieur. La tablette babylonienne Plimpton 322, gravée vers 1800 avant notre ère, aligne quinze triplets de nombres qui vérifient exactement l'égalité — dont certains bien trop grands pour avoir été trouvés au hasard, comme 119, 120 et 169. Les Babyloniens connaissaient donc la relation mille ans avant les Grecs. Ce que l'école pythagoricienne a apporté n'est pas la découverte, c'est la DÉMONSTRATION : le passage d'une recette qui marche à une vérité qu'on prouve. C'est exactement le geste que cette fiche vous demande d'apprendre à écrire.

Définition : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

Dans un triangle rectangle, l'HYPOTÉNUSE est le côté opposé à l'angle droit — c'est toujours le plus long. Le théorème de Pythagore affirme que son carré est égal à la somme des carrés des deux autres côtés : si le triangle ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$. La RÉCIPROQUE fait le chemin inverse : si l'égalité est vérifiée, alors le triangle est rectangle, et l'angle droit se situe au sommet opposé au plus grand côté.

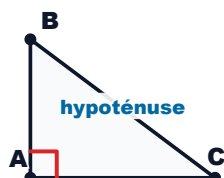


Rectangle en A : le côté opposé, BC , est l'hypoténuse. On vérifie que $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, et que $5^2 = 25$.

Propriétés : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

Repérer l'hypoténuse avant tout calcul

L'hypoténuse est le côté OPPOSÉ à l'angle droit, jamais l'un de ceux qui le forment. Dans un triangle rectangle en A , c'est donc BC — celui qui ne contient pas la lettre A . C'est aussi le plus long des trois, ce qui donne un contrôle gratuit : un résultat où l'hypoténuse serait plus courte qu'un autre côté est nécessairement faux.



Rectangle en A :
l'hypoténuse est BC , la seule qui ne touche pas A .

Calculer l'hypoténuse : on additionne

Quand les deux côtés de l'angle droit sont connus, on élève chacun au carré, on additionne, puis on prend la racine carrée. Avec 3 cm et 4 cm : $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$, donc l'hypoténuse mesure $\sqrt{25} = 5$ cm. ⚠ La racine se prend à la FIN — écrire $\sqrt{3} + \sqrt{4}$ n'a rien à voir avec le résultat cherché.

étape	calcul
les carrés	$3^2 = 9 \cdot 4^2 = 16$
la somme	$9 + 16 = 25$
la racine	$\sqrt{25} = 5$

la racine, seulement à la fin

Trois lignes, toujours dans cet ordre.

Calculer un côté de l'angle droit : on soustrait

Quand c'est l'hypoténuse qui est connue, l'opération s'inverse : on retranche. Avec une hypoténuse de 13 cm et un côté de 5 cm : $13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$, donc l'autre côté mesure $\sqrt{144} = 12$ cm. ➖ Et l'ordre n'est pas libre — c'est toujours le carré de l'hypoténuse qui vient en premier, sans quoi l'on obtiendrait un nombre négatif.

on connaît	on fait
les 2 côtés droits	on ADDITIONNE
l'hypoténuse + 1	on SOUSTRAIT
l'ordre	grand ² - petit ²

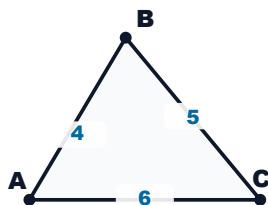
la donnée décide de l'opération

Repérer d'abord si l'hypoténuse fait partie des données : tout en découle.

La réciproque : prouver qu'un angle est droit

C'est la nouveauté de l'année.

Quand on connaît les TROIS longueurs et qu'on ignore si le triangle est rectangle, on compare le carré du plus grand côté à la somme des carrés des deux autres. S'ils sont égaux, le triangle est rectangle, et l'angle droit se trouve au sommet OPPOSÉ à ce plus grand côté. S'ils diffèrent, il ne l'est pas.



On ne le dessine pas avec un angle droit : c'est justement ce qu'il faut établir.

Direct et réciproque ne se remplacent pas

Le théorème DIRECT part de l'angle droit et aboutit à l'égalité : il suppose donc le triangle rectangle, et sert à calculer une longueur. La RÉCIPROQUE part de l'égalité et aboutit à l'angle droit : elle sert à démontrer. ➡ Utiliser le direct pour prouver qu'un triangle est rectangle revient à supposer ce qu'on cherche — c'est un raisonnement circulaire, et il ne vaut aucun point.

	on part de	on obtient
direct	l'angle droit	l'égalité
réciproque	l'égalité	l'angle droit

deux sens, deux usages

L'énoncé dit lequel employer : « calcule » appelle le direct, « démontre » la réciproque.

La rédaction attendue tient en quatre temps

C'est ce que le brevet note, et c'est ce que la banque interroge le plus. On écrit d'abord L'HYPOTHÈSE — « le triangle ABC est rectangle en A » — puis on NOMME le théorème, puis on pose l'égalité et on calcule, puis on CONCLUT par une phrase avec l'unité. ➡ Écrire « d'après Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » sans avoir dit où se trouve l'angle droit est une rédaction incomplète, même si le calcul est juste.

temps	ce qu'on écrit
1. hypothèse	ABC rectangle en A
2. théorème	d'après Pythagore
3. calcul	$BC^2 = AB^2 + AC^2$
4. conclusion	donc $BC = 5$ cm

le premier temps est celui qu'on saute

Le calcul juste ne suffit pas : c'est la phrase qui l'entoure qui est notée.

La rédaction de la réciproque a ses propres mots

Elle ne s'écrit pas comme le direct.
On calcule SÉPARÉMENT les deux membres — d'un côté le carré du plus grand, de l'autre la somme des deux carrés — puis on les compare, et on conclut. La phrase attendue est : « comme $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A ». Le sommet doit être nommé.

on calcule	à part
le grand carré	$10^2 = 100$
la somme	$6^2 + 8^2 = 100$
on compare	égaux : rectangle

deux colonnes, puis on compare

Calculer les deux membres SÉPARÉMENT est ce qui rend la comparaison honnête.

Quelques triplets qu'il vaut mieux reconnaître

Certains triplets de nombres entiers vérifient exactement l'égalité, et les reconnaître fait gagner un temps précieux : 3-4-5, 6-8-10, 5-12-13, 9-12-15. Les trois derniers sont d'ailleurs des agrandissements ou des cousins du premier. ⚠ Mais un triplet non reconnu ne prouve rien : il faut alors calculer, et 4-5-6 montre bien que trois entiers proches ne suffisent pas.

triplet	vérification
3, 4, 5	$9 + 16 = 25 \checkmark$
6, 8, 10	$36 + 64 = 100 \checkmark$
5, 12, 13	$25 + 144 = 169 \checkmark$
4, 5, 6	$16 + 25 = 41 \neq 36$

le dernier n'est pas rectangle

Reconnaître va vite ; vérifier ne trompe jamais.

La formule : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

LE THÉORÈME ET SA RÉCIPROQUE, DANS UN TRIANGLE RECTANGLE EN

A

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

La même égalité sert dans les deux sens, et c'est ce qui rend la distinction difficile. Lue de gauche à droite quand on SAIT que le triangle est rectangle, elle calcule une longueur. Lue à l'envers quand on l'IGNORE, elle démontre l'angle droit. ⚠ Ce n'est pas la formule qui change : c'est ce qu'on admet au départ.

l'énoncé dit

on emploie

« calcule BC »

le direct

« démontre que... »

la réciproque

« ce triangle est-il rectangle ? »

la réciproque

le verbe de la consigne tranche

Un seul mot de l'énoncé décide du théorème à citer.

Méthode : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

1. Commencer par situer l'angle droit

Avant tout calcul, on repère où il est — l'énoncé le dit, ou la figure le code. L'hypoténuse est alors le côté opposé, et c'est elle qui portera le carré isolé dans l'égalité. Sauter cette étape est la cause de la moitié des erreurs de signe.

2. Décider entre addition et soustraction

Si l'hypoténuse est CHERCHÉE, on additionne les carrés. Si elle est DONNÉE, on soustrait — et toujours dans l'ordre « carré de l'hypoténuse moins carré du côté connu ». Un résultat négatif signale qu'on a inversé.

3. Ne prendre la racine qu'à la fin

On travaille sur les CARRÉS jusqu'au bout, puis on extrait la racine une seule fois, sur le résultat. Passer par des racines intermédiaires introduit des arrondis et des erreurs, et ne simplifie rien.

4. Pour la réciproque : deux colonnes séparées

On calcule d'un côté le carré du plus grand, de l'autre la somme des deux autres carrés, SANS les écrire dans une même égalité — puisqu'on ignore encore si elle est vraie. On compare seulement ensuite.

5. Rédiger, même quand le calcul est évident

Les quatre temps s'écrivent toujours : hypothèse, théorème nommé, calcul, conclusion avec l'unité. ⚠ Le premier est celui qu'on saute, et c'est celui qui coûte des points — le correcteur doit lire OÙ se trouve l'angle droit.

Selon ce que l'on cherche : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

On me donne les deux côtés de l'angle droit

J'additionne leurs carrés, puis je prends la racine : j'obtiens l'hypoténuse.

On me donne l'hypoténuse et un côté

Je soustrais le carré du côté connu de celui de l'hypoténuse, puis je prends la racine.

On me donne les trois longueurs

Je compare le carré du plus grand à la somme des deux autres carrés : c'est la réciproque.

On me demande de démontrer, pas de calculer

J'emploie la réciproque, et je nomme le sommet de l'angle droit dans ma conclusion.

Le problème parle d'une échelle, d'une diagonale, d'un mât

Je cherche le triangle rectangle caché dans la situation, puis j'applique le théorème direct.

Exemples corrigés : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction

attendue

Calculer une hypoténuse, rédigé comme au brevet

Le triangle ABC est rectangle en A , avec $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm.

Calculer BC .

Le triangle ABC est rectangle en A . D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On remplace : $BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. Donc $BC = \sqrt{100} = 10$ cm. ⚠️ Remarquez les quatre temps : la première phrase pose l'hypothèse, la deuxième nomme le théorème, la troisième calcule, la quatrième conclut AVEC l'unité. Le correcteur cherche les quatre.

Calculer un côté de l'angle droit

Le triangle ABC est rectangle en A , avec $BC = 13$ cm et $AB = 5$ cm.

Calculer AC .

étape	calcul
on isole	$AC^2 = BC^2 - AB^2$
on remplace	$169 - 25$
on conclut	$AC = 12$ cm

l'hypoténuse d'abord

Isoler AVANT de remplacer évite l'inversion.

Le triangle ABC est rectangle en A . D'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On isole le terme cherché : $AC^2 = BC^2 - AB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$. Donc $AC = \sqrt{144} = 12$ cm. ⚠️ L'ordre de la soustraction n'est pas libre : $5^2 - 13^2$ donnerait -144 , et aucune longueur n'est négative. C'est toujours le carré de l'hypoténuse qui vient en premier.

Démontrer qu'un triangle est rectangle

Un triangle ABC a pour côtés $AB = 9$ cm, $AC = 12$ cm et $BC = 15$ cm.

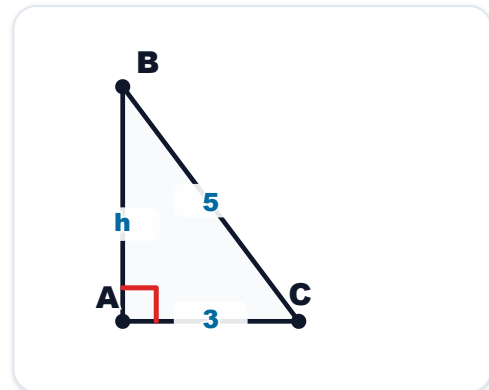
Ce triangle est-il rectangle ?

Le plus grand côté est BC , avec 15 cm. On calcule SÉPARÉMENT les deux membres, puisqu'on ignore encore s'ils sont égaux. D'une part, $BC^2 = 15^2 = 225$. D'autre part, $AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Les deux résultats sont égaux. Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A — le sommet opposé au plus grand côté. ⚠ Le nommer fait partie de la réponse : conclure « il est rectangle » sans dire où ne vaut pas tous les points.

L'échelle contre le mur

Une échelle de 5 m est posée contre un mur, son pied à 3 m du mur.

À quelle hauteur touche-t-elle le mur ?



L'échelle est l'hypoténuse : la hauteur cherchée est plus petite qu'elle.

Le mur, le sol et l'échelle forment un triangle rectangle, dont l'angle droit est au pied du mur — c'est la situation qu'il faut voir avant tout calcul. L'échelle en est l'HYPOTÉNUSE, puisqu'elle est opposée à cet angle droit. D'après le théorème de Pythagore, $5^2 = 3^2 + h^2$, donc $h^2 = 25 - 9 = 16$ et $h = 4$ m. L'échelle touche le mur à 4 mètres de haut. ⚠ L'erreur consiste à traiter l'échelle comme un côté de l'angle droit : on additionnerait alors au lieu de soustraire, et l'on trouverait une hauteur PLUS GRANDE que l'échelle elle-même.

Pièges à éviter : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

Employer le théorème direct pour PROUVER qu'un triangle est rectangle. Il suppose l'angle droit : c'est la réciproque qui le démontre.

Écrire « d'après Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » sans dire où se trouve l'angle droit. La rédaction est incomplète, même avec un calcul juste.

Prendre pour hypoténuse un côté qui touche l'angle droit. C'est le côté OPPOSÉ, et le plus long des trois.

Soustraire dans le mauvais sens : $5^2 - 13^2$ donne un nombre négatif, alors qu'aucune longueur ne l'est.

Prendre la racine trop tôt. On travaille sur les carrés jusqu'au bout, et l'on extrait une seule fois, à la fin.

Écrire directement l'égalité dans une réciproque. Tant qu'on ignore si elle est vraie, on calcule les deux membres SÉPARÉMENT.

Conclure « il est rectangle » sans nommer le sommet. L'angle droit est opposé au plus grand côté, et il faut le dire.

À retenir : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

L'hypoténuse est opposée à l'angle droit, et c'est le plus long côté.

Rectangle en A : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Hypoténuse cherchée : on additionne. Hypoténuse donnée : on soustrait.

La réciproque part de l'égalité et conclut à l'angle droit — jamais l'inverse.

Quatre temps : hypothèse, théorème nommé, calcul, conclusion avec l'unité.

3-4-5, 6-8-10, 5-12-13 : des triplets à reconnaître d'un coup d'œil.

Exercices corrigés : Pythagore, sa réciproque, et la rédaction attendue

1. Dans un triangle rectangle en A , quel côté est l'hypoténuse ?

Correction :

C'est BC , le côté opposé à l'angle droit — le seul qui ne contient pas la lettre A . C'est aussi le plus long des trois.

2. Un triangle rectangle a des côtés de l'angle droit de 6 cm et 8 cm. Quelle est son hypoténuse ?

Correction :

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100, \text{ donc l'hypoténuse vaut } \sqrt{100} = 10 \text{ cm.}$$

3. Un triangle rectangle a une hypoténuse de 13 cm et un côté de l'angle droit de 5 cm. Combien mesure l'autre côté ?

Correction :

$$13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144, \text{ donc l'autre côté vaut } \sqrt{144} = 12 \text{ cm. L'hypoténuse vient toujours en premier dans la soustraction.}$$

4. Un triangle a pour côtés 9 cm, 12 cm et 15 cm. Est-il rectangle ?

Correction :

Le plus grand côté vaut 15. D'une part $15^2 = 225$; d'autre part $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$. Les deux membres sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle au sommet opposé au côté de 15 cm.

5. Un triangle a pour côtés 4 cm, 5 cm et 6 cm. Est-il rectangle ?

Correction :

Le plus grand côté vaut 6, donc $6^2 = 36$. Et $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$. Comme $36 \neq 41$, le triangle n'est PAS rectangle. Trois entiers proches ne suffisent pas.

6. On connaît les trois longueurs d'un triangle et l'on veut savoir s'il est rectangle. Quel théorème employer ?

Correction :

La réciproque du théorème de Pythagore. Le théorème direct ne conviendrait pas : il suppose déjà l'angle droit, donc il supposerait ce qu'on cherche à démontrer.

7. Un élève écrit « d'après Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » sans préciser que le triangle est rectangle en A . Sa rédaction est-elle complète ?

Correction :

Non. L'hypothèse doit être écrite AVANT le théorème : c'est elle qui autorise à l'employer, et elle indique au correcteur où se trouve l'angle droit.

8. Quel est le bon ordre pour rédiger un calcul de longueur avec Pythagore ?

Correction :

Hypothèse — le triangle est rectangle en tel sommet ; théorème nommé ; égalité et calcul ; conclusion avec l'unité. Quatre temps, dans cet ordre.

9. Un rectangle mesure 9 cm sur 12 cm. Quelle est la longueur de sa diagonale ?

Correction :

La diagonale coupe le rectangle en deux triangles rectangles dont elle est l'hypoténuse. Donc $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$, et la diagonale vaut $\sqrt{225} = 15$ cm.

10. Une échelle de 5 m est posée contre un mur, son pied à 3 m du mur. À quelle hauteur touche-t-elle le mur ?

Correction :

L'échelle est l'hypoténuse du triangle rectangle formé par le mur et le sol. Donc $h^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$, et $h = 4$ m. Contrôle : la hauteur trouvée est bien inférieure à la longueur de l'échelle.