

La racine carrée

cours et exercices corrigés de maths 3e

Élever au carré, on sait faire depuis la cinquième : 7 donne 49. La racine carrée fait le chemin INVERSE — elle part de 49 et retrouve 7. Et ce chemin de retour n'est pas un caprice de programme : dès qu'on connaît l'aire d'un carré et qu'on cherche son côté, ou qu'on applique Pythagore et qu'on cherche une longueur, on ne peut plus s'en passer.

LE SYMBOLE

$\sqrt{\quad}$ — le radical, et sa barre qui couvre tout

CE QUE ÇA DÉFAIT

Le carré : $\sqrt{a^2} = a$ et $(\sqrt{a})^2 = a$

LA CONDITION

Seulement pour un nombre POSITIF, et le résultat est positif

À quoi ça sert : la racine carrée

Un terrain carré de 400 m² a un côté de 20 m : c'est la racine carrée qui le donne, et c'est le calcul que fait un géomètre avant de commander une clôture. En physique, la vitesse d'un objet qui tombe s'obtient par une racine carrée. En statistiques — la partie que Frédéric mesure tous les jours — l'ÉCART-TYPE est la racine carrée de la variance : on prend la racine précisément pour revenir à l'unité de départ, des euros ou des centimètres, et non des euros au carré.

Un peu d'histoire : la racine carrée

Les Babyloniens, vers -1800, calculaient déjà des racines carrées avec une précision remarquable : la tablette YBC 7289 donne $\sqrt{2}$ avec six décimales justes. Les Grecs, eux, ont eu un choc en découvrant que $\sqrt{2}$ ne s'écrit comme aucune fraction — la légende veut qu'un pythagoricien l'ait payé cher. Le symbole $\sqrt{\quad}$ apparaît en 1525 sous la plume de l'Allemand Christoff Rudolf : c'est un r déformé, pour « radix », la racine en latin.

Définition : la racine carrée

La **RACINE CARRÉE** d'un nombre positif a , notée $\sqrt{a}$, est le nombre **POSITIF** dont le carré vaut a .
Autrement dit, $\sqrt{a}$ est le seul nombre positif qui vérifie $(\sqrt{a})^2 = a$. ★ Géométriquement, c'est le **CÔTÉ** du carré dont l'aire vaut a : voilà pourquoi le mot « carré » est dans son nom.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

25 cases d'aire 1, et un côté de 5 :
 $\sqrt{25} = 5$

Chaque case vaut une unité d'aire : on peut les compter, il y en a 25. Le côté, lui, se lit sur un bord : 5 cases. La racine carrée de 25 est donc 5 — non pas parce qu'une calculatrice l'affiche, mais parce que c'est la longueur qui, répétée sur les deux côtés, produit cette aire.

Propriétés : la racine carrée

Un carré parfait a une racine entière

Un CARRÉ PARFAIT est le carré d'un entier : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100... Ce sont les seuls nombres dont la racine carrée tombe juste. ★ Les connaître jusqu'à $15^2 = 225$ fait gagner un temps considérable au brevet — 36 est un carré parfait, 20 n'en est pas un.

n	n × n
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36

La racine est TOUJOURS positive

$4^2 = 16$, et $(-4)^2 = 16$ aussi : deux nombres ont pour carré 16. Mais $\sqrt{16}$ n'en désigne qu'UN SEUL, le positif. ⚠ $\sqrt{16} = 4$, jamais -4 , et jamais « 4 ou -4 ». C'est une convention, et elle est indispensable : sans elle, $\sqrt{16}$ ne serait pas un nombre mais deux.

on écrit	on obtient
4×4	16
$(-4) \times (-4)$	16
$\sqrt{16}$	4 seulement

deux carrés donnent 16, une seule racine

Le carré et la racine se défont l'un l'autre

$(\sqrt{7})^2 = 7$: on prend la racine, puis le carré, et on retrouve le nombre de départ. Dans l'autre sens, $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$. ★ Les deux opérations s'annulent, comme $+3$ et -3 , ou comme $\times 2$ et $\div 2$. C'est ce qui permet de résoudre $x^2 = 49$.

départ	on élève	on prend la racine
7	49	7
12	144	12

l'aller-retour ramène au départ

n	n × n
7	49
8	64

puis 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225

Une racine qui ne tombe pas juste a quand même une place

20 n'est pas un carré parfait, donc $\sqrt{20}$ n'est pas entier. Mais on sait l'ENCADRER : $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$, or $16 < 20 < 25$, donc $4 < \sqrt{20} < 5$. ★ Encadrer, c'est déjà connaître : on sait où le nombre se trouve, et son écriture décimale ne s'arrête jamais.



$\sqrt{20}$ se place entre 4 et 5, plus près de 4,5

La racine d'une somme n'est PAS la somme des racines

C'est l'erreur la plus fréquente de la notion, et un contre-exemple suffit à la tuer. $\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. ⚠ $5 \neq 7$: la barre du radical couvre TOUT ce qui est dessous, et il faut donc calculer la somme AVANT de prendre la racine.

ce qu'on écrit	ça vaut
$\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25}$	5
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4$	7

$5 \neq 7$: les deux écritures ne disent pas la même chose

La formule : la racine carrée

LE CÔTÉ D'UN CARRÉ À PARTIR DE SON AIRE

$$c = \sqrt{\text{aire}}$$

Une aire de 49 cm² donne un côté de 7 cm, car $7 \times 7 = 49$. C'est le sens géométrique de la racine, et le calcul le plus fréquent au brevet.

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

aire 49, côté 7 : $\sqrt{49} = 7$

Méthode : la racine carrée

1. Chercher un carré parfait AVANT de sortir la calculatrice

Devant $\sqrt{144}$, on ne tape pas : on se demande quel entier a pour carré 144. Les carrés de 11 à 15 (121, 144, 169, 196, 225) reviennent sans cesse au brevet, et les reconnaître transforme un calcul en lecture.

2. Encadrer : deux carrés parfaits qui entourent le nombre

Pour $\sqrt{60}$, on cherche le carré parfait juste en dessous et celui juste au-dessus : $49 < 60 < 64$, c'est-à-dire $7^2 < 60 < 8^2$. On conclut $7 < \sqrt{60} < 8$. Le plus grand entier dont le carré ne dépasse pas 60 est donc 7.

3. Résoudre $x^2 = a$: deux solutions, pas une

⚠ Ne pas confondre deux questions différentes. $\sqrt{49}$ vaut 7, un seul nombre. Mais l'équation $x^2 = 49$ a DEUX solutions, 7 et -7 . La racine carrée choisit le positif ; l'équation, elle, ne choisit pas.

4. Vérifier en élevant au carré

Toute racine trouvée se contrôle en une seconde : on l'élève au carré et on doit retomber sur le nombre de départ. $\sqrt{169} = 13$? On vérifie : $13 \times 13 = 169$. C'est juste.

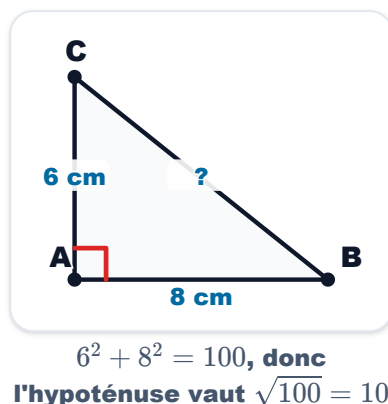
Selon ce que l'on cherche : la racine carrée

Retrouver un côté à partir d'une aire

Une aire de carré est un côté multiplié par lui-même : pour remonter au côté, on prend la racine carrée de l'aire.

Terminer un calcul de Pythagore

Pythagore donne le CARRÉ de la longueur cherchée. La racine carrée est le dernier geste, celui qui fournit enfin la longueur.



Situer un nombre qu'on ne sait pas écrire

$\sqrt{2}$ ne s'écrit ni comme fraction ni comme décimal qui s'arrête.

L'encadrer entre 1 et 2 suffit pourtant à le comparer, l'ordonner, le placer.

Exemples corrigés : la racine carrée

Calculer une racine carrée

On cherche $\sqrt{144}$.

Quel est ce nombre ?

essai	son carré	verdict
10	100	trop petit
11	121	trop petit
12	144	c'est lui

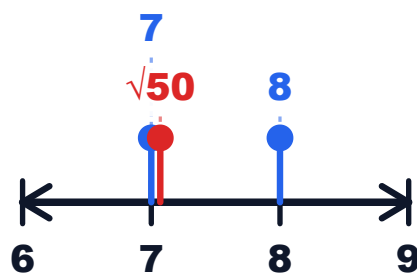
on remonte la liste des carrés

On cherche l'entier positif dont le carré vaut 144. En parcourant les carrés : $10^2 = 100$, trop petit ; $11^2 = 121$, trop petit ; $12^2 = 144$. C'est lui. Donc $\sqrt{144} = 12$. Contrôle : $12 \times 12 = 144$. ★ Aucune calculatrice n'a servi — seulement la liste des carrés.

Encadrer entre deux entiers

On cherche à encadrer $\sqrt{50}$ entre deux entiers consécutifs.

Entre quels entiers se trouve-t-il ?



$\sqrt{50}$ est juste après 7

On cherche les deux carrés parfaits qui entourent 50. Le plus proche en dessous est $49 = 7^2$; le plus proche au-dessus est $64 = 8^2$. Comme $49 < 50 < 64$, on en déduit $7 < \sqrt{50} < 8$. ★ Et 50 est tout près de 49 : $\sqrt{50}$ est donc à peine plus grand que 7, ce qu'aucun encadrement ne dit mais que la position sur la droite montre.

Le carré et son côté

Un carré a une aire de 49 cm^2 .

Quelle est la longueur de son côté ?

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

49 cases, 7 de côté

L'aire d'un carré vaut côté $\times$ côté. On cherche donc le nombre positif dont le carré vaut 49 : c'est $\sqrt{49} = 7$.

Le côté mesure 7 cm. Contrôle : $7 \times 7 = 49$, et le périmètre vaudrait $4 \times 7 = 28$ cm. ⚠ On n'a pas divisé 49 par 4 : diviser l'aire par 4 ne donne pas le côté, c'est une erreur qui revient chaque année.

Pièges à éviter : la racine carrée

Écrire $\sqrt{16} = 8$ en divisant par 2. Diviser n'est pas prendre la racine : on cherche le nombre qui, MULTIPLIÉ par lui-même, redonne 16 — c'est 4.

Répondre « 4 ou -4 » à $\sqrt{16}$. Le symbole $\sqrt{}$ désigne toujours le nombre POSITIF. C'est l'équation $x^2 = 16$ qui a deux solutions, pas la racine.

Écrire $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$. Faux : 5 d'un côté, 7 de l'autre. La barre du radical couvre toute la somme, qu'il faut calculer en premier.

Croire que toute racine carrée s'écrit avec des décimales qui s'arrêtent. $\sqrt{2} = 1,414\dots$ ne s'arrête jamais et n'est aucune fraction : on l'encadre, ou on garde l'écriture $\sqrt{2}$.

Confondre $\sqrt{a}$ et $a/2$. Elles coïncident pour $a = 4$ seulement — et cette coïncidence est justement ce qui ancre l'erreur.

À retenir : la racine carrée

$\sqrt{a}$ est le nombre POSITIF dont le carré vaut a : $(\sqrt{a})^2 = a$.

Les carrés parfaits à connaître : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

Encadrer $\sqrt{n}$, c'est trouver les deux carrés parfaits qui entourent n .

$\sqrt{(a + b)}$ n'est PAS $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ — un contre-exemple suffit : $\sqrt{25} = 5$ mais $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Géométriquement, $\sqrt{\text{aire}}$ = côté du carré.

Exercices corrigés : la racine carrée

1. Calculer $\sqrt{81}$.

Correction :

On cherche l'entier positif dont le carré vaut 81 : $9 \times 9 = 81$. Donc $\sqrt{81} = 9$. ⚠ Ce n'est ni 8 (qui donnerait 64), ni 40,5 (qui serait $81 \div 2$).

2. Calculer $\sqrt{169}$.

Correction :

$12^2 = 144$, trop petit ; $13^2 = 169$. Donc $\sqrt{169} = 13$. Ce carré fait partie de ceux de 11 à 15 qu'il faut savoir de mémoire.

3. Parmi 45, 48, 49 et 50, lequel est un carré parfait ?

Correction :

49, car $49 = 7 \times 7$. Les trois autres ne sont le carré d'aucun entier : ils tombent entre $36 = 6^2$ et $49 = 7^2$, ou entre 49 et $64 = 8^2$.

4. 20 est-il un carré parfait ?

Correction :

Non. $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$, et 20 se trouve entre les deux sans être ni l'un ni l'autre. Sa racine n'est donc pas entière : $4 < \sqrt{20} < 5$.

5. Entre quels entiers consécutifs se trouve $\sqrt{60}$?

Correction :

On encadre 60 par deux carrés parfaits : $49 < 60 < 64$, soit $7^2 < 60 < 8^2$. Donc $7 < \sqrt{60} < 8$.

6. Quel est le plus grand entier dont le carré est inférieur ou égal à 30 ?

Correction :

$5^2 = 25$ ne dépasse pas 30, mais $6^2 = 36$ le dépasse. La réponse est donc 5. (C'est aussi la partie entière de $\sqrt{30}$.)

7. Que vaut $(\sqrt{11})^2$?

Correction :

11. Le carré défait la racine : on n'a pas besoin de connaître la valeur décimale de $\sqrt{11}$ pour répondre.

8. Un élève écrit $\sqrt{(16 + 9)} = 4 + 3 = 7$. Où est l'erreur ?

Correction :

La barre du radical couvre toute la somme : il faut d'abord calculer $16 + 9 = 25$, puis prendre la racine. $\sqrt{25} = 5$, et non 7. La racine d'une somme n'est pas la somme des racines.

9. Un carré a une aire de 144 cm^2 . Quel est son côté ?

Correction :

Le côté vaut $\sqrt{144} = 12 \text{ cm}$, car $12 \times 12 = 144$. ⚠ Pas $144 \div 4 = 36$, qui ne correspond à rien ici : diviser par 4 donnerait le quart de l'aire, pas le côté.

10. Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 8 cm. Quelle est la longueur de l'hypoténuse ?

Correction :

Pythagore donne le carré de l'hypoténuse : $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. La longueur est donc $\sqrt{100} = 10 \text{ cm}$. La racine carrée est bien le dernier geste, celui qui passe d'une aire à une longueur.