

# La racine carrée

cours et exercices corrigés de maths 2nde

La racine carrée traverse les produits sans effort —  $\sqrt{4 \times 9} = 2 \times 3$  — mais elle butte sur les sommes. C'est toute la difficulté du chapitre : une règle vraie d'un côté, fausse de l'autre, et rien dans l'écriture ne prévient.

## MOTS CLÉS

**Radical, carré parfait, simplifier, radicaux identiques**

## LE SECRET

**Le produit passe, la somme non**

## OUTIL

**La liste des carrés parfaits**

## À quoi ça sert : la racine carrée

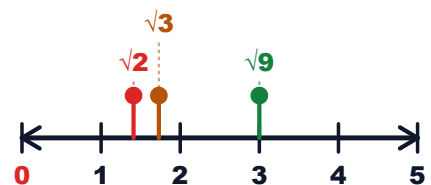
Pour vérifier qu'un mur est bien d'équerre, un maçon mesure 3 m sur un côté, 4 m sur l'autre, et contrôle que la diagonale fait 5 m — car  $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ . ⚠ Et cela n'a rien à voir avec  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$  : on additionne les CARRÉS avant de prendre la racine, jamais les racines entre elles.

## Un peu d'histoire : la racine carrée

Les Grecs ont découvert que  $\sqrt{2}$  ne s'écrit avec aucune fraction — la légende dit que cette découverte fut si dérangeante qu'on tenta de l'étouffer. Le symbole  $\sqrt{\quad}$ , lui, date de 1525 : c'est un *r* déformé, pour « radix », la racine en latin.

## Définition : la racine carrée

Pour un nombre  $a$  positif ou nul,  $\sqrt{a}$  est le nombre POSITIF dont le carré vaut  $a$ . C'est un nombre comme un autre :  $\sqrt{2}$  vaut environ 1,41 et se place entre 1 et 2 sur la droite graduée. Un nombre négatif, lui, n'a pas de racine carrée.



$\sqrt{2} \approx 1,41$ ,  $\sqrt{3} \approx 1,73$ , et  $\sqrt{9} = 3$  tout rond.  
Une racine n'est pas un symbole étrange : c'est un point sur la droite.

# Propriétés : la racine carrée

## Les carrés parfaits

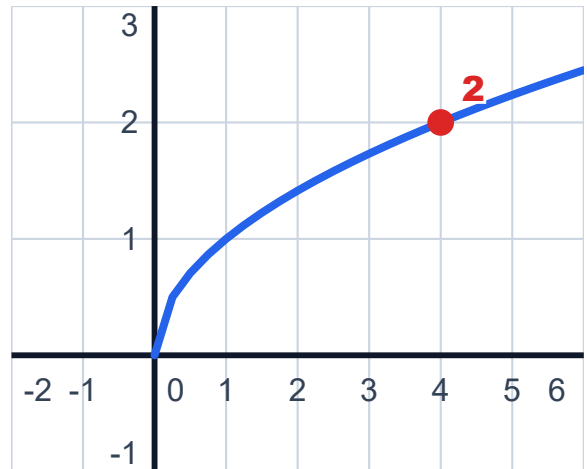
Certaines racines tombent juste. Les connaître par cœur est ce qui permet de repérer un carré caché dans un nombre.

### À connaître par cœur

| Données    | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |
|------------|---|---|---|----|----|----|----|
| $\sqrt{a}$ | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  |

## Une fonction qui refuse les négatifs

Sur la courbe, 4 a bien une image :  $\sqrt{4} = 2$ . Mais  $-1$  n'en a AUCUNE — la courbe s'arrête à zéro et ne va pas à gauche. C'est cela, « pas de racine d'un négatif ».



## Le PRODUIT passe

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ . C'est cette règle qui permet de simplifier — et c'est aussi elle qui rend l'erreur sur la somme si tentante.

### Les deux donnent 6 ✓

| Données | $\sqrt{(4 \times 9)}$ | $\sqrt{4} \times \sqrt{9}$ |
|---------|-----------------------|----------------------------|
| vaut    | $\sqrt{36} = 6$       | $2 \times 3 = 6$           |

## ❌ La SOMME ne passe pas

$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . On le vérifie sur des carrés parfaits, où tout se calcule : il n'y a pas de doute possible.

### 5 ≠ 7 : la règle est FAUSSE

| Données | $\sqrt{(9 + 16)}$ | $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ |
|---------|-------------------|------------------------|
| vaut    | $\sqrt{25} = 5$   | $3 + 4 = 7$            |

## La racine d'un carré

$\sqrt{a^2} = |a|$ , et non  $a$  : la racine rend toujours un résultat POSITIF. Pour  $a$  négatif, elle rend son opposé.

### Toujours positif

| Données        | 5 | -5 | 3 | -3 |
|----------------|---|----|---|----|
| $\sqrt{(a^2)}$ | 5 | 5  | 3 | 3  |

## Méthode : la racine carrée

### 1. Je cherche un carré en facteur

Je décompose le nombre sous le radical en cherchant le plus GRAND carré parfait qui le divise. Pour 50 : c'est 25.

| Données     | 50            | 12           | 75            | 48            |
|-------------|---------------|--------------|---------------|---------------|
| carré caché | $25 \times 2$ | $4 \times 3$ | $25 \times 3$ | $16 \times 3$ |

### 2. Je le sors du radical

$\sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ . Le carré sort en devenant sa racine ; le reste demeure dessous.

| Données | $\sqrt{50}$ | $\sqrt{12}$ | $\sqrt{75}$ | $\sqrt{48}$ |
|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| devient | $5\sqrt{2}$ | $2\sqrt{3}$ | $5\sqrt{3}$ | $4\sqrt{3}$ |

### 3. J'additionne les radicaux IDENTIQUES

Une fois simplifiés, deux termes de même radical s'additionnent par leurs coefficients — exactement comme  $x + 3x = 4x$ .

#### On simplifie AVANT

| Données | $\sqrt{75} - \sqrt{48}$ | $5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ |
|---------|-------------------------|-------------------------|
| vaut    | $\sqrt{3}$              | $\sqrt{3}$              |

## Selon ce que l'on cherche : la racine carrée

### Simplifier une écriture

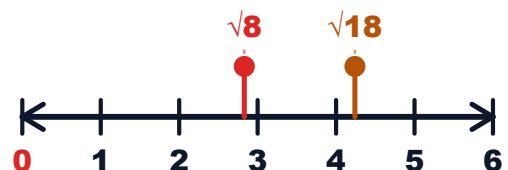
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$  : la forme simplifiée est plus courte, et surtout elle révèle le radical commun.

#### Même radical : $\sqrt{2}$

| Données | $\sqrt{8}$  | $\sqrt{18}$ | $\sqrt{32}$ |
|---------|-------------|-------------|-------------|
| devient | $2\sqrt{2}$ | $3\sqrt{2}$ | $4\sqrt{2}$ |

### Additionner

$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ . Impossible à voir sans simplifier d'abord.



## Calculer une longueur

Une diagonale, une hypoténuse :  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . On additionne les CARRÉS, puis on prend la racine.

| Données   | 3 et 4 | 6 et 8 | 5 et 12 |
|-----------|--------|--------|---------|
| diagonale | 5      | 10     | 13      |

## Exemples corrigés : la racine carrée

### Simplifier

$\sqrt{8}$ .

Écrire cette racine sous forme simplifiée.

| Données | 8            |
|---------|--------------|
| =       | $4 \times 2$ |

On cherche le plus grand carré parfait qui divise 8 : c'est 4. Donc  $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ .

### Un carré plus grand

$\sqrt{72}$ .

Simplifier au maximum.

| Données | 72            |
|---------|---------------|
| =       | $36 \times 2$ |

$72 = 36 \times 2$ , et 36 est le plus GRAND carré qui le divise :  $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ . ⚠ Prendre 4 au lieu de 36 donnerait  $2\sqrt{18}$  — exact, mais pas simplifié jusqu'au bout.

## Une somme impossible

$$\sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Peut-on simplifier ?

| Données      | $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ |
|--------------|-----------------------|------------|
| vaut environ | 3,15                  | 2,24       |

Non. Les radicaux diffèrent — 2 et 3 — donc rien ne se regroupe. Et surtout  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$  : les valeurs approchées le montrent, 3,15 contre 2,24. La réponse est  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ , telle quelle.

## La question du contrôle

$$C = \sqrt{75} - \sqrt{48}.$$

Écrire  $C$  sous la forme  $a\sqrt{3}$ .

| Données | $\sqrt{75}$ | $\sqrt{48}$ |
|---------|-------------|-------------|
| devient | $5\sqrt{3}$ | $4\sqrt{3}$ |

On simplifie chacune :  $75 = 25 \times 3$  donne  $5\sqrt{3}$ , et  $48 = 16 \times 3$  donne  $4\sqrt{3}$ . Le radical est le même, on soustrait les coefficients :  $C = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$ , donc  $a = 1$ .

## Pièges à éviter : la racine carrée

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ . L'erreur imite la règle du PRODUIT, qui elle est vraie — c'est ce qui la rend tenace. Contrôle imparable :  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$ , alors que  $\sqrt{25} = 5$ .
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  ne se simplifie pas, et c'est une RÉPONSE COMPLÈTE. Laisser une racine dans le résultat n'est pas un échec.
- On SIMPLIFIE avant d'additionner.  $\sqrt{75} - \sqrt{48}$  semble irréductible ; écrit  $5\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ , c'est immédiat.
- $\sqrt{a^2} = |a|$ , pas  $a$ . Une racine ne rend jamais un résultat négatif.
- On cherche le PLUS GRAND carré en facteur.  $\sqrt{72} = 2\sqrt{18}$  est exact mais pas fini : c'est  $6\sqrt{2}$ .

## À retenir : la racine carrée

$\sqrt{a}$  est le nombre POSITIF dont le carré vaut  $a$ .

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ — le produit passe.}$$

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b} \text{ — la somme ne passe pas.}$$

Simplifier : sortir le plus grand carré parfait,  $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ .

$$a\sqrt{k} + b\sqrt{k} = (a+b)\sqrt{k} \text{ — comme } x + 3x = 4x.$$

Radicaux différents : on n'additionne pas, on laisse tel quel.

## Exercices corrigés : la racine carrée

1. Combien vaut  $\sqrt{64}$  ?

Correction :

8, car  $8^2 = 64$ . C'est un carré parfait, la racine tombe juste.

2. Pourquoi  $\sqrt{-9}$  n'existe-t-elle pas ?

Correction :

Aucun nombre au carré ne donne un résultat négatif : un carré est toujours positif ou nul. La racine carrée n'est définie que pour  $a \geq 0$ .

3. Combien vaut  $\sqrt{(-7)^2}$  ?

Correction :

$(-7)^2 = 49$ , donc  $\sqrt{49} = 7$ . On retient  $\sqrt{a^2} = |a|$  : le résultat est POSITIF, ce n'est pas  $-7$ .

4. Calculer  $\sqrt{4} \times \sqrt{25}$ .

Correction :

$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$ . On peut aussi écrire  $\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = 10$  : le produit passe dans les deux sens.

5. Est-il vrai que  $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$  ?

Correction :

Non. À gauche :  $\sqrt{25} = 5$ . À droite :  $4 + 3 = 7$ . La racine ne se distribue PAS sur une somme.

6. Simplifier  $\sqrt{18}$ .

Correction :

$18 = 9 \times 2$ , et 9 est un carré parfait :  $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ .

**7. Simplifier  $\sqrt{200}$ .**

**Correction :**

$200 = 100 \times 2$ , et 100 est le plus grand carré qui le divise :  $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ . Passer par  $4 \times 50$  donnerait  $2\sqrt{50}$ , exact mais pas fini.

**8. Combien vaut  $\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$  ?**

**Correction :**

Même radical, donc on additionne les coefficients — en n'oubliant pas le 1 sous-entendu :  $1\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$ .

**9. Combien vaut  $\sqrt{3} + \sqrt{7}$  ?**

**Correction :**

Rien de plus : les radicaux diffèrent, on ne peut pas les regrouper. La réponse est  $\sqrt{3} + \sqrt{7}$  — et surtout pas  $\sqrt{10}$ .

**10. Sur la courbe de la fonction racine carrée, quelle est l'image de 9 ? Et celle de  $-4$  ?**

**Correction :**

L'image de 9 est  $\sqrt{9} = 3$ . Celle de  $-4$  n'existe pas : la courbe ne va pas à gauche de zéro, donc  $-4$  n'a AUCUNE image. Le domaine de la fonction racine carrée est  $[0 ; +\infty[$ .

**11. Écrire  $\sqrt{50} + \sqrt{8}$  sous la forme  $a\sqrt{2}$ .**

**Correction :**

On simplifie d'abord :  $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$  et  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ . Le radical est le même, on additionne les coefficients :  $5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ , donc  $a = 7$ .