

# Repère et coordonnées

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Deux formules seulement : le milieu est une MOYENNE, la distance est PYTHAGORE. Tout l'intérêt du chapitre est ailleurs — c'est ce qu'elles permettent de DÉMONTRER : qu'un quadrilatère est un parallélogramme, qu'un triangle est rectangle, sans jamais rien mesurer.

## MOTS CLÉS

**Abscisse, ordonnée, milieu, distance, orthonormé**

## LE SECRET

**Les diagonales de  $ABCD$  sont  $[AC]$  et  $[BD]$**

## OUTIL

**La moyenne pour le milieu, Pythagore pour la distance**

## À quoi ça sert : Repère et coordonnées

Un GPS ne connaît rien d'autre que des coordonnées. Quand une application affiche « la boulangerie est à 340 m », elle a fait exactement le calcul de cette fiche : deux soustractions, deux carrés, une racine. Et quand elle propose un point de rendez-vous à mi-chemin entre deux amis, elle calcule un milieu — une moyenne d'abscisses et une moyenne d'ordonnées. Les deux seules formules du chapitre tournent des milliards de fois par jour.

## Un peu d'histoire : Repère et coordonnées

En 1637, Descartes publie La Géométrie — le même livre où il fixe l'écriture des exposants. Il y fait une chose alors inouïe : donner une adresse chiffrée à chaque point du plan, si bien qu'une figure devient une équation et qu'un raisonnement géométrique devient un calcul. Fermat y était arrivé de son côté, un an plus tôt, sans publier. C'est de là que vient le mot « cartésien », et c'est de là que vient la possibilité de PROUVER qu'un triangle est rectangle sans jamais poser une équerre dessus.

## Définition : Repère et coordonnées

Un repère du plan est formé d'une origine  $O$  et de deux axes gradués. Tout point  $M$  y a un couple de coordonnées  $(x; y)$  :  $x$  est son **ABSCISSE**, lue sur l'axe horizontal, et  $y$  son **ORDONNÉE**, lue sur l'axe vertical. Le repère est **ORTHONORMÉ** quand les deux axes sont perpendiculaires et ont la même unité — condition sans laquelle la formule de la distance est fautive.

$$M \left( \frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

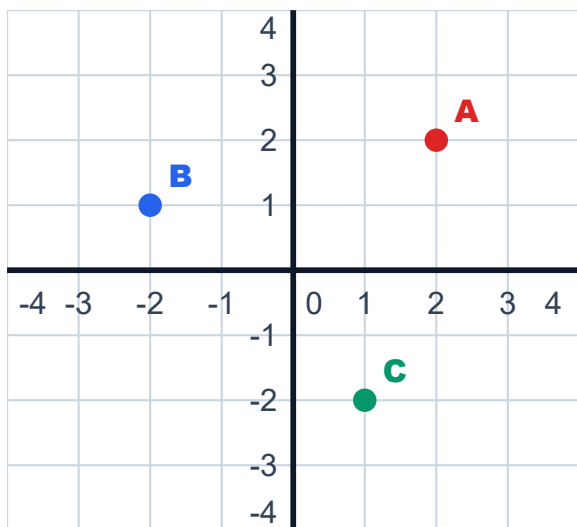
En bleu le milieu, qui est un POINT. En rouge la distance, qui est un NOMBRE. Ce sont les deux seules formules du chapitre.

Le milieu rend un point, la distance rend un nombre. Et seule la seconde exige un repère orthonormé — c'est la question que le sujet pose pour vérifier qu'on l'a compris.

## Propriétés : Repère et coordonnées

### Lire et placer un point

On lit toujours l'abscisse EN PREMIER. Ci-contre  $A(2; 2)$ ,  $B(-2; 1)$  — à gauche, donc abscisse négative — et  $C(1; -2)$ , en dessous. ⚠  $B(-2; 1)$  et  $B(1; -2)$  ne sont pas le même point : c'est justement  $C$ .



### Le milieu : une moyenne

Le milieu  $M$  de  $[AB]$  a pour coordonnées  $\left( \frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ . C'est la moyenne des abscisses et la moyenne des ordonnées — rien de plus.

$$A(2; 4) \quad B(8; 10)$$

$$x_M = \frac{2 + 8}{2} = 5$$

$$y_M = \frac{4 + 10}{2} = 7$$

Deux moyennes, et le milieu vaut  $M(5; 7)$ .

## La distance : Pythagore déguisé

Dans un repère ORTHONORMÉ,  $AB =$

$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ . C'est le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle dont  $[AB]$  est l'hypoténuse et dont les côtés sont l'écart horizontal et l'écart vertical.

$$A(1;2) \quad B(4;6)$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$AB = \sqrt{25} = 5$$

En rouge l'écart horizontal, en vert le vertical : le triangle rectangle est caché dans la formule.

## — Sans repère orthonormé, pas de distance

Si les axes ne sont pas perpendiculaires, ou si leurs unités diffèrent, il n'y a aucun triangle rectangle : Pythagore ne s'applique plus et la formule ment. Le milieu, lui, reste valable dans n'importe quel repère.

le milieu

valable partout

la distance

orthonormé exigé

Sans angle droit ni unité commune, il n'y a aucun triangle rectangle — donc pas de Pythagore.

## Méthode : Repère et coordonnées

### 1. J'écris les coordonnées avant tout

Je note  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  au brouillon. La moitié des erreurs du chapitre sont des confusions entre l'abscisse et l'ordonnée.

$$A(2;5)$$

$$B(6;1)$$

En rouge les abscisses, en vert les ordonnées. On ne les mélange plus.

### 2. Je choisis l'outil selon la question

Parallélogramme ou symétrique ? C'est le MILIEU. Nature d'un triangle, longueur, cercle ? C'est la DISTANCE. Aucune question de ce chapitre n'en demande un troisième.

parallélogramme nature du triangle

le MILIEU

la DISTANCE

La question dit l'outil, et il n'y en a que deux.

### 3. Je reste sur les carrés

Pour la nature d'un triangle, je compare  $AB^2$ ,  $AC^2$  et  $BC^2$  sans jamais sortir les racines : une égalité approchée ne démontre rien.

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

On compare les CARRÉS :  $9 + 16 = 25$ . Aucune racine à sortir.

---

**Selon ce que l'on cherche : Repère et coordonnées**

## Prouver un parallélogramme

$ABCD$  est un parallélogramme si et seulement si  $[AC]$  et  $[BD]$  ont le même milieu. ➡ Ce sont les DIAGONALES : celles qui sautent une lettre, pas les côtés  $[AB]$  et  $[CD]$ .

milieu de  $[AC] =$   
milieu de  $[BD]$



$ABCD$  parallélogramme

Les diagonales sautent une lettre :  $[AC]$  et  $[BD]$ ,  
jamais les côtés.

## Trouver la nature d'un triangle

Deux longueurs égales : isocèle. Pythagore vérifié sur les carrés : rectangle. Les deux à la fois : rectangle isocèle.  
Aucune des deux : quelconque.

$AB = AC$   
isocèle en  $A$

$AB^2 + AC^2 = BC^2$   
rectangle en  $A$

Les deux à la fois : rectangle isocèle. Aucune des deux : quelconque.

## Construire le symétrique d'un point

«  $B$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $C$  » signifie exactement «  $C$  est le milieu de  $[AB]$  ». On écrit la formule du milieu à l'envers :  $x_B = 2x_C - x_A$ .

$$x_B = 2x_C - x_A$$
$$x_B = 2 \times 4 - 1 = 7$$

La formule du milieu écrite à l'envers. Avec  $A(1 ; 3)$  et  $C(4 ; 5)$  :  $B(7 ; 7)$ .

## Exemples corrigés : Repère et coordonnées

### Lire des coordonnées

Un point situé à 4 à gauche de l'origine et 3 en dessous.

Quelles sont ses coordonnées ?

← à gauche  
*x négatif*

↓  
en dessous  
*y négatif*

Vers la gauche, l'abscisse est négative ; vers le bas, l'ordonnée l'est aussi. Le point est donc  $(-4 ; -3)$ .

⚠ On écrit toujours l'abscisse en premier.

### Un milieu

$A(-3 ; 5)$  et  $B(7 ; -1)$ .

Coordonnées du milieu  $M$  de  $[AB]$  ?

$$x_M = \frac{-3 + 7}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$$

Les négatifs entrent dans la moyenne comme les autres.

$$x_M = \frac{-3 + 7}{2} = 2 \text{ et } y_M = \frac{5 + (-1)}{2} = 2.$$

Donc  $M(2 ; 2)$ . ⚠ Les nombres négatifs entrent dans la moyenne comme les autres : c'est là que se perdent les signes.

## Une distance

$A(1; -2)$  et  $B(5; 1)$ , repère orthonormé.

Calculer  $AB$ .

$$AB = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$AB = \sqrt{25} = 5$$

En rouge l'écart horizontal, en vert le vertical.

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5. \star \text{ Les carrés effacent les signes : peu importe qu'on calcule } x_B - x_A \text{ ou l'inverse.}$$

## La nature d'un triangle

$A(1; 1)$ ,  $B(4; 2)$  et  $C(-1; 7)$ , repère orthonormé.

Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?

$$AB^2 = 10 \quad AC^2 =$$

$$40 \quad BC^2 = 50$$

$$10 + 40 = 50$$

Pythagore est vérifié : le triangle est rectangle en A.

$AB^2 = 3^2 + 1^2 = 10$ ,  $AC^2 = (-2)^2 + 6^2 = 40$ ,  $BC^2 = (-5)^2 + 5^2 = 50$ . Or  $10 + 40 = 50$ , c'est-à-dire  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  : par la réciproque de Pythagore, le triangle est RECTANGLE EN A, le sommet opposé au plus grand côté.  $\star$  On n'a sorti aucune racine — et c'est exactement ce qui rend la preuve exacte.

## Pièges à éviter : Repère et coordonnées

- ➖ Dans  $ABCD$ , les diagonales sont  $[AC]$  et  $[BD]$  — celles qui sautent une lettre. Comparer les milieux de  $[AB]$  et  $[CD]$  ne prouve rien du tout.
- ➖ La formule de la distance exige un repère ORTHONORMÉ. Sans angle droit ni unité commune, il n'y a pas de triangle rectangle, donc pas de Pythagore.
- ➖ Le milieu est une SOMME divisée par deux, pas une différence.  $\frac{x_A + x_B}{2}$ , jamais  $\frac{x_B - x_A}{2}$  — cette dernière est un écart, pas une position.
- ➖ Un milieu est un POINT, il a deux coordonnées. Une distance est un NOMBRE, positif. Rendre l'un pour l'autre est l'erreur de lecture d'énoncé la plus fréquente.
- ➖ Pour la réciproque de Pythagore, on reste sur les CARRÉS. Sortir les racines donne des décimaux approchés, et une égalité approchée ne démontre rien.
- ➖  $A(3; 2)$  et  $A(2; 3)$  sont deux points différents. L'abscisse s'écrit toujours en premier.

## À retenir : Repère et coordonnées

Milieu de  $[AB]$  :  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$  — une moyenne.

Distance :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$  — Pythagore, et seulement en repère orthonormé.

$ABCD$  parallélogramme  $\iff [AC]$  et  $[BD]$  ont le même milieu.

$B$  symétrique de  $A$  par rapport à  $C \iff C$  est le milieu de  $[AB]$ .

Nature d'un triangle : deux longueurs égales pour isocèle, Pythagore sur les carrés pour rectangle.

Un milieu est un point ; une distance est un nombre.

## Exercices corrigés : Repère et coordonnées

1. Placer mentalement  $A(-2; 4)$  : où se trouve-t-il ?

Correction :

À 2 unités à gauche de l'origine et 4 au-dessus — donc dans le quart en haut à gauche du repère.

2. Coordonnées du milieu de  $[AB]$  avec  $A(2; 4)$  et  $B(8; 10)$  ?

Correction :

$$\left(\frac{2+8}{2}; \frac{4+10}{2}\right) = (5; 7).$$

3. Coordonnées du milieu de  $[AB]$  avec  $A(-5; 3)$  et  $B(1; -7)$  ?

Correction :

$$\left(\frac{-5+1}{2}; \frac{3-7}{2}\right) = (-2; -2). \text{ Les signes entrent dans la moyenne comme le reste.}$$

4. Calculer  $AB$  avec  $A(0; 0)$  et  $B(6; 8)$ , repère orthonormé.

Correction :

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

5. Calculer  $AB$  avec  $A(-1; 2)$  et  $B(3; -1)$ , repère orthonormé.

Correction :

Écart :  $3 - (-1) = 4$  et  $-1 - 2 = -3$ . Donc  $AB = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ .

6. Peut-on utiliser la formule de la distance dans un repère non orthonormé ?

Correction :

Non. Elle repose sur Pythagore, qui exige un angle droit entre les axes et une même unité. La formule du milieu, elle, reste valable.

7. Soit  $A(1; 2)$ ,  $B(5; 3)$  et  $C(6; 7)$ . Quel point  $D$  rend  $ABCD$  parallélogramme ?

Correction :

Les diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$  doivent avoir le même milieu, donc  $x_D = x_A + x_C - x_B = 1 + 6 - 5 = 2$  et  $y_D = 2 + 7 - 3 = 6$ . Ainsi  $D(2; 6)$ .

8. Soit  $A(0; 1)$  et  $C(3; -2)$ . Quel est le symétrique  $B$  de  $A$  par rapport à  $C$  ?

Correction :

$C$  doit être le milieu de  $[AB]$ , donc  $x_B = 2 \times 3 - 0 = 6$  et  $y_B = 2 \times (-2) - 1 = -5$ . Ainsi  $B(6; -5)$ .

9. Soit  $A(0; 0)$ ,  $B(3; 1)$  et  $C(1; 3)$ . Nature du triangle  $ABC$  ?

Correction :

$AB^2 = 9 + 1 = 10$  et  $AC^2 = 1 + 9 = 10$  : les deux sont égaux, donc le triangle est ISOCÈLE EN  $A$ . ( $BC^2 = 4 + 4 = 8$ , différent, donc il n'est pas équilatéral.)

10. Soit  $A(2; 1)$ ,  $B(5; 2)$  et  $C(0; 7)$ . Nature du triangle  $ABC$  ?

Correction :

$AB^2 = 9 + 1 = 10$ ,  $AC^2 = 4 + 36 = 40$ ,  $BC^2 = 25 + 25 = 50$ . Comme  $10 + 40 = 50$ , la réciproque de Pythagore donne un triangle RECTANGLE EN  $A$ .

