

Résoudre une équation

cours et exercices corrigés de maths 3e

Depuis la quatrième, une équation avait une réponse, et une seule. La troisième apporte une nouveauté qui a l'air modeste — l'équation produit nul — et qui casse cette évidence : une équation peut désormais avoir deux solutions, et n'en donner qu'une, c'est n'avoir répondu qu'à moitié.

PRÉREQUIS

Calcul littéral, développement, équations du 1er degré (4e)

L'IDÉE CLÉ

Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est

OUTIL

Développer, factoriser, vérifier

À quoi ça sert : Résoudre une équation

Poser une équation, c'est donner un nom à ce qu'on ne sait pas encore, puis laisser le calcul le trouver. Combien de samoussas peut-on acheter avec dix euros si la boisson en coûte deux ? Combien de tours de piste après un premier kilomètre ? Combien de mois avant qu'un abonnement devienne rentable ? Dans chaque cas on écrit la phrase avec un x , et la résolution répond. C'est le geste que font, sans le dire, un devis, un budget ou un calcul de dosage.

Un peu d'histoire : Résoudre une équation

Le mot « algèbre » vient du titre d'un livre écrit à Bagdad vers 820 par Al-Khwārizmī : « al-jabr », qui désigne l'opération consistant à faire passer un terme de l'autre côté. Son nom, latinisé, a donné « algorithme ». Il écrivait encore tout en toutes lettres ; l'inconnue notée x et le signe égal n'arrivent qu'au XVIe siècle, avec Viète et Recorde — près de sept siècles plus tard.

Définition : Résoudre une équation

Une équation est une égalité qui contient une inconnue, presque toujours notée x . La résoudre, c'est trouver TOUTES les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie : ces valeurs sont les solutions. Pour y arriver, on transforme l'équation par des opérations appliquées des DEUX CÔTÉS du signe

l'écriture	est-ce une équation ?
$3x + 4 = 19$	oui : un $=$ et une inconnue
$3x + 4$	non : pas de signe $=$

égal, jusqu'à isoler x . Une équation peut n'avoir aucune solution, une seule, ou plusieurs.

l'écriture

est-ce une équation ?

$$3 + 4 = 7$$

non : pas d'inconnue

il faut les deux à la fois

un signe = ET une inconnue : les deux sont nécessaires

Une expression sans signe égal ne se résout pas, et une égalité sans inconnue n'a rien à chercher.

Propriétés : Résoudre une équation

Ce qu'on fait d'un côté, on le fait de l'autre

C'est la règle unique du premier degré. Une équation est une balance : ajouter, retrancher, multiplier ou diviser d'un seul côté la déséquilibre et change les solutions. On applique donc la même opération aux deux membres.

étape	l'équation
au départ	$x + 7 = 12$
on retire 7 partout	$x = 12 - 7$
on calcule	$x = 5$

la même opération des deux côtés

On isole x en défaisant les opérations

On enlève d'abord ce qui est ajouté, puis on divise par ce qui multiplie. Pour $4x = 28$, on divise les deux membres par 4 et l'on obtient $x = 7$. L'ordre compte : additions d'abord, multiplication ensuite.

l'équation	la solution
$x + 7 = 12$	$x = 5$
$4x = 28$	$x = 7$
$2x + 3 = 11$	$x = 4$

on défait dans l'ordre inverse

On développe avant de résoudre

Quand une parenthèse est multipliée, on la développe d'abord : $2(x + 3) = 14$ devient $2x + 6 = 14$, puis $x = 4$. ATTENTION : le facteur multiplie TOUT ce qui est dans la parenthèse. Écrire $3(x + 4) = 3x + 4$ est faux — c'est $3x + 12$.

écriture	développement
$2(x + 3)$	$2x + 6$
$3(x + 4)$	$3x + 12$
$3(x + 4) = 3x + 4$	FAUX

le facteur multiplie tout

Un produit est nul si un facteur est nul

Deux solutions, et il faut les deux

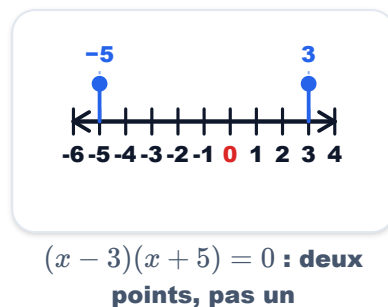
Un carré nul ne donne qu'une solution

C'est la nouveauté de la troisième, et c'est une propriété des nombres, pas une astuce : un produit de deux facteurs vaut zéro exactement quand l'un des deux vaut zéro. Aucun autre cas n'est possible, parce que multiplier deux nombres non nuls ne donne jamais zéro.

si	alors
$A \times B = 0$	$A = 0$ ou $B = 0$
$(x - 3)(x + 5) = 0$	$x - 3 = 0$ ou $x + 5 = 0$
on résout séparément	$x = 3$ ou $x = -5$

deux facteurs, donc deux équations

Une équation produit nul a en général DEUX solutions, et une réponse qui n'en donne qu'une est incomplète. Le piège le plus fréquent est le signe : dans $(x - 4)(x + 2) = 0$, la seconde solution est -2 , pas 2 . On résout chaque facteur comme une équation à part entière.



C'est l'exception, et elle se comprend : $(x - 4)^2 = 0$ s'écrit $(x - 4)(x - 4) = 0$, donc les deux facteurs sont le même. Les deux équations à résoudre sont identiques, et la solution unique est $x = 4$.

l'équation	solution
$(x - 3)(x + 5) = 0$	3 et -5
$(x - 4)^2 = 0$	4 seulement

deux facteurs identiques, une seule solution

L'équation $x^2 = a$ a deux solutions

Un carré ne dit pas le signe : $x^2 = 9$ est vraie pour 3 ET pour -3 , puisque $(-3)^2$ vaut aussi 9. Les solutions sont donc la racine carrée de a et son opposée. Si a est négatif, il n'y a AUCUNE solution : un carré n'est jamais négatif. Et si a vaut 0, il n'y en a qu'une, zéro.



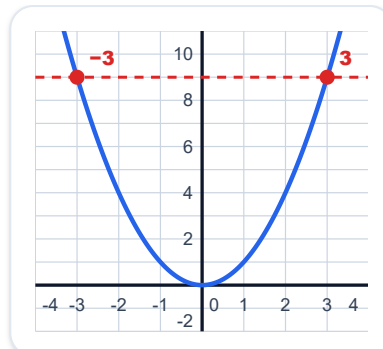
Sur un graphique : deux points d'intersection

La courbe de $y = x^2$ est une parabole. Résoudre $x^2 = 9$, c'est chercher où elle rencontre la droite horizontale d'ordonnée 9 : il y a deux points, d'abscisses -3 et 3 . Ils sont symétriques par rapport à l'axe vertical, ce qui explique d'un coup d'œil pourquoi les deux solutions sont opposées.

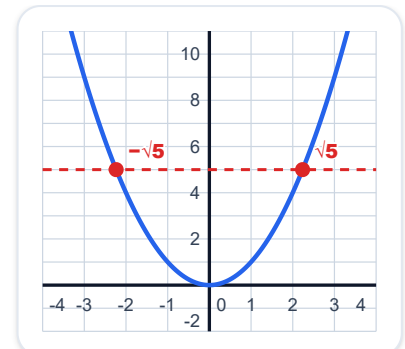
Et quand le carré n'est pas parfait

Pour $x^2 = 5$, la droite coupe toujours la parabole en deux points, mais leurs abscisses ne tombent sur aucune graduation : le graphique donne « un peu plus de 2 » et rien de plus. C'est justement là que la racine carrée devient nécessaire — les solutions s'écrivent exactement $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$, et valent environ $-2,2$ et $2,2$.

$x^2 = 9$: deux solutions opposées



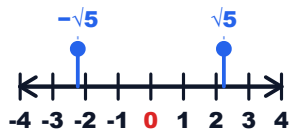
$x^2 = 9$: la droite coupe la parabole en deux points



$x^2 = 5$: les points existent, mais ne se lisent pas

Où tombent exactement $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$

Reportées sur une droite graduée, les deux solutions se placent ENTRE 2 et 3, un peu après 2. Elles sont toujours symétriques par rapport à zéro, comme dans le cas du carré parfait — mais aucune graduation ne les porte. C'est précisément pour nommer ces nombres-là que la racine carrée existe.



$-\sqrt{5} \approx -2,2$ et $\sqrt{5} \approx 2,2$: entre deux graduations

Une solution se vérifie en remplaçant

Pour savoir si un nombre est solution, on le remplace partout dans l'équation et l'on calcule LES DEUX MEMBRES. S'ils donnent le même résultat, c'est une solution. Calculer un seul côté ne prouve rien : c'est l'égalité qu'on teste, pas un membre.

à gauche	à droite	
$3 \times 4 + 2 = 14$	14	
$2 \times 5 + 1 = 11$	12	

on calcule les deux membres

La formule : Résoudre une équation

L'ÉQUATION PRODUIT NUL

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

facteur	s'annule en
$x - 3$	3
$x + 5$	-5

le signe s'inverse en passant de l'autre côté

$(x - 3)(x + 5) = 0$ donne $x = 3$ ou $x = -5$.

Attention au signe : le facteur $(x + 5)$
s'annule en -5 , pas en 5 .

Méthode : Résoudre une équation

1. Développer et réduire d'abord

S'il y a des parenthèses multipliées, on développe. On regroupe ensuite les x d'un côté et les nombres de l'autre, toujours en appliquant la même opération aux deux membres.

2. Reconnaître un produit nul

Si l'équation se présente sous la forme d'un PRODUIT égal à ZÉRO, on ne développe SURTOUT PAS : développer détruirait la factorisation, qui est justement ce qui permet de conclure.

3. Résoudre chaque facteur à part

On écrit deux équations du premier degré, une par facteur, et on les résout séparément. Puis on donne les DEUX solutions : « $x = 3$ ou $x = -5$ ».

on écrit	on obtient
$x - 3 = 0$	$x = 3$
$x + 5 = 0$	$x = -5$

deux équations, deux solutions

4. Vérifier avant de conclure

On remplace chaque solution trouvée dans l'équation de départ et l'on calcule les deux membres. C'est le seul contrôle qui détecte une erreur de signe, l'erreur la plus fréquente du chapitre.

5. Traduire un problème

On appelle x la quantité cherchée, on écrit l'énoncé sous forme d'égalité, on résout — et on revient à la question posée pour répondre par une phrase.

Selon ce que l'on cherche : Résoudre une équation

L'équation est du premier degré

L'équation est un produit égal à zéro

On veut savoir si un nombre est solution

Un seul x , sans carré ni parenthèse en facteur : on isole x en appliquant la même opération des deux côtés.

On ne développe pas. On annule chaque facteur séparément, et on donne toutes les solutions.

On le remplace et on calcule les deux membres : ils doivent être égaux.

Exemples corrigés : Résoudre une équation

Une équation du premier degré

L'équation $2(x + 3) = 14$.

Quelle est la solution ?

On développe : $2x + 6 = 14$. On retire 6 des deux côtés : $2x = 8$. On divise les deux membres par 2 : $x = 4$. Vérification : $2 \times (4 + 3) = 2 \times 7 = 14$. C'est bien la solution.

Une équation produit nul

L'équation $(x - 3)(x + 5) = 0$.

Quelles sont les solutions ?



les deux solutions, sur la droite graduée

Un produit est nul si l'un de ses facteurs l'est. On résout donc $x - 3 = 0$, qui donne $x = 3$, puis $x + 5 = 0$, qui donne $x = -5$. L'équation a deux solutions : 3 et -5. Vérification pour -5 : $(-5 - 3) \times (-5 + 5) = (-8) \times 0 = 0$.

Vérifier une solution

L'équation $3x + 2 = 14$, et le nombre 4.

Le nombre 4 est-il solution ?

On remplace x par 4 dans le membre de gauche : $3 \times 4 + 2 = 12 + 2 = 14$. Le membre de droite vaut 14. Les deux membres sont égaux, donc 4 est bien solution.

Les samoussas

À La Réunion, un élève achète des samoussas à 1 € chacun et paie aussi 2 € pour une boisson. Au total, il paie 9 €.

Combien de samoussas a-t-il achetés ?

On appelle x le nombre de samoussas. La dépense s'écrit $1 \times x + 2 = 9$, soit $x + 2 = 9$. On retire 2 des deux côtés : $x = 7$. Il a acheté 7 samoussas.

Pièges à éviter : Résoudre une équation

Ne donner qu'une seule solution à une équation produit nul : il en faut deux, sauf si les deux facteurs sont identiques.

Se tromper de signe : le facteur $(x + 5)$ s'annule en -5 , pas en 5 . C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Développer un produit nul : $(x - 3)(x + 5) = 0$ se résout tel quel. Développer détruit la factorisation qui permettait de conclure.

Croire que $(x - 3)(x + 1) = 0$ entraîne $x - 3 = x + 1$: les deux facteurs ne sont pas égaux entre eux, c'est leur PRODUIT qui vaut zéro.

Écrire $3(x + 4) = 3x + 4$: le facteur multiplie tout, donc $3x + 12$.

N'appliquer une opération que d'un seul côté : $x + 6 = 14$ ne donne pas $x = 14 + 6$, mais $x = 14 - 6$.

Vérifier un seul membre : c'est l'égalité qu'on teste, donc les deux.

À retenir : Résoudre une équation

Résoudre, c'est trouver TOUTES les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie.

Toute opération s'applique aux deux membres à la fois.

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

Une équation produit nul a deux solutions — une seule si les deux facteurs sont identiques.

Le facteur $(x + a)$ s'annule en $-a$: le signe s'inverse.

On ne développe jamais un produit déjà égal à zéro.

$x^2 = a$ a deux solutions opposées si $a > 0$, une seule si $a = 0$, aucune si $a < 0$.

Graphiquement, ce sont les points où la droite $y = a$ coupe la parabole $y = x^2$.

Exercices corrigés : Résoudre une équation

1. Résoudre : $x + 7 = 12$

Correction :

On retire 7 des deux côtés : $x = 12 - 7 = 5$.

2. Résoudre : $4x = 28$

Correction :

On divise les deux membres par 4 : $x = 28 \div 4 = 7$.

3. Résoudre : $2(x + 3) = 14$

Correction :

On développe : $2x + 6 = 14$. On retire 6 : $2x = 8$. On divise par 2 : $x = 4$.

4. Résoudre : $(x - 3)(x + 5) = 0$

Correction :

Un produit est nul si un facteur l'est. $x - 3 = 0$ donne $x = 3$; $x + 5 = 0$ donne $x = -5$. Les solutions sont 3 et -5.

5. Un élève résout $(x - 4)(x + 2) = 0$ et écrit : $x = 4$ et $x = 2$. A-t-il raison ?

Correction :

Non, à moitié. La première solution est juste, mais le facteur $(x + 2)$ s'annule en -2, pas en 2. Les solutions sont 4 et -2.

6. Résoudre : $(x - 6)^2 = 0$

Correction :

L'écriture $(x - 6)^2$ signifie $(x - 6)(x - 6)$: les deux facteurs sont identiques, donc les deux équations aussi. Il y a une seule solution, $x = 6$.

7. Le nombre 5 est-il solution de $2x + 1 = 12$?

Correction :

On remplace : $2 \times 5 + 1 = 11$. Le membre de droite vaut 12. Les deux membres diffèrent, donc 5 n'est pas solution.