

Le second degré

cours et exercices corrigés de maths 1re spé

Un trinôme s'écrit de trois façons, et un seul nombre décide de ce qui est possible : le discriminant. Δ ne calcule rien — il dit si les racines existent, donc si la forme factorisée existe, donc si le signe du trinôme change quelque part.

PRÉREQUIS

Développer, factoriser, équation produit nul, identités remarquables

L'IDÉE CLÉ

Le SIGNE de Δ décide : deux racines, une seule, ou aucune

OUTIL

Trois écritures du trinôme — on prend celle que la question réclame

À quoi ça sert : le second degré

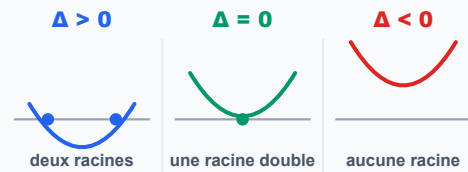
Un ballon lancé vers le haut suit une trajectoire parabolique : sa hauteur, en mètres, vaut environ $h(t) = -5t^2 + v_0t + h_0$, où v_0 est la vitesse initiale et h_0 la hauteur de départ. « Quand retombe-t-il au sol ? » demande de résoudre $h(t) = 0$: une équation du second degré, dont on ne garde que la solution positive. « Quelle hauteur maximale atteint-il ? » demande la forme canonique, qui donne le sommet. ★ Deux questions sur le même ballon, deux écritures différentes du même trinôme — c'est exactement ce que le chapitre apprend à choisir.

Un peu d'histoire : le second degré

Les Babyloniens résolvaient déjà des problèmes du second degré vers -1700, mais par des recettes géométriques, aire par aire. C'est le mathématicien perse al-Khwārizmī qui, au IX^e siècle, en donne la première méthode générale — la COMPLÉTION DU CARRÉ, exactement le geste qui mène à la forme canonique. Le mot « algèbre » vient du titre de son ouvrage, al-jabr, « la remise en place ». Le mot « discriminant », lui, n'apparaît qu'au XIX^e siècle sous la plume de Sylvester : il vient du latin discriminare, séparer — parce que ce nombre SÉPARE les cas.

Définition : le second degré

Un **TRINÔME DU SECOND DEGRÉ** est une expression $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa courbe est une **PARABOLE**, tournée vers le haut si $a > 0$, vers le bas si $a < 0$. Son **DISCRIMINANT** est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$. Ce nombre ne sert pas à calculer : il **DÉCIDE**. Son signe dit combien de fois la parabole rencontre l'axe des abscisses — deux fois, une fois, ou jamais — et donc si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions, une seule, ou aucune.



Les racines sont les points où la parabole **RENCONTRE** l'axe. Quand elle ne le rencontre pas, il n'y a rien à factoriser.

★ Ces trois dessins contiennent tout le chapitre. Deux racines : la forme factorisée existe et le trinôme **CHANGE** de signe deux fois. Une racine double : le trinôme touche l'axe sans le traverser, il ne change jamais de signe. Aucune racine : il n'y a rien à factoriser, et le trinôme garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

Propriétés : le second degré

★ Le discriminant décide

$\Delta = b^2 - 4ac$. Son signe donne le nombre de solutions de $ax^2 + bx + c = 0$, et il le donne **AVANT** tout calcul de racine. ➖ Si $\Delta < 0$, on s'arrête : écrire $\sqrt{\Delta}$ n'a aucun sens, la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\Delta > 0 \rightarrow$ deux solutions

$\Delta = 0 \rightarrow$ une solution double

$\Delta < 0 \rightarrow$ aucune solution

On calcule Δ d'abord, on décide ensuite. Jamais l'inverse.

Les deux racines, et ce qu'elles cachent

Quand $\Delta > 0$, les solutions sont x_1 et x_2 données par la formule. Leur **SOMME** vaut $-\frac{b}{a}$ et leur **PRODUIT** $\frac{c}{a}$: deux relations qui permettent souvent de deviner les racines de tête, sans discriminant.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Pour $x^2 - 5x + 6$: somme 5, produit 6 $\rightarrow$ 2 et 3, sans calculer Δ .

La forme factorisée n'existe pas toujours

Si $\Delta \geq 0$, le trinôme s'écrit $a(x - x_1)(x - x_2)$ — avec $x_1 = x_2$ quand $\Delta = 0$.  Si $\Delta < 0$, AUCUNE factorisation n'est possible dans $\mathbb{R}$: ce n'est pas qu'on ne la trouve pas, c'est qu'elle n'existe pas.

$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$
$$x^2 + 2x + 5 \longrightarrow \Delta = -16 \text{ —}$$

La factorisation se vérifie en développant : on doit retrouver le départ.

Le signe : celui de a , sauf entre les racines

Un trinôme est du signe de a partout, SAUF entre ses racines où il prend le signe contraire.  Et quand $\Delta < 0$ il n'y a pas de racines, donc pas d'« entre » : il garde le signe de a sur tout $\mathbb{R}$. La règle est la même, c'est le dessin qui change.

$$\Delta > 0$$

signe de a , sauf entre

$$\Delta \leq 0$$

signe de a partout

Une seule phrase couvre les trois cas, si l'on comprend qu'« entre les racines » peut être vide.

Méthode : le second degré

1. 1. J'identifie a , b , c et je calcule Δ

 Avec les signes. Dans $2x^2 - 3x - 5$, on a $a = 2$, $b = -3$ et $c = -5$: les moins font partie des coefficients. Puis $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 9$$

 $-4 \times 2 \times (-5)$ est POSITIF : deux signes moins se compensent.

2. 2. Le signe de Δ décide de la suite

$\Delta > 0$: j'applique la formule des racines. $\Delta = 0$: une seule racine, $-\frac{b}{2a}$. $\Delta < 0$: je conclus « pas de solution » et je m'arrête — il n'y a rien d'autre à écrire.

$$\Delta = 49 > 0 \longrightarrow x = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 2,5$$

$\sqrt{49} = 7$: on cherche toujours si Δ est un carré parfait, ça évite la calculatrice.

3. 3. Je choisis l'écriture que la question réclame

Les racines ? Forme factorisée. Le sommet ou l'extremum ? Forme canonique. L'ordonnée à l'origine ? Forme développée. Les trois désignent le même nombre pour chaque x — mais l'une répond en une ligne là où les autres demandent tout le travail.

DÉVELOPPÉE

$$x^2 - 2x - 3$$

montre l'ordonnée à l'origine

FACTORISÉE

$$(x + 1)(x - 3)$$

montre les racines

CANONIQUE

$$(x - 1)^2 - 4$$

montre le sommet

Selon ce que l'on cherche : le second degré

★ Résoudre une inéquation

On ramène tout d'un côté pour avoir > 0 ou < 0 , on cherche les racines, puis on dresse le tableau de signes. La solution est une réunion d'intervalles, pas une valeur.

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \iff (x + 1)(x - 3) < 0$$

$$S =]-1; 3[$$

$a = 1 > 0$, donc le trinôme est négatif ENTRE les racines.

Trouver un maximum ou un minimum

La forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ donne l'extremum sans dérivée : un carré est toujours positif, donc β est atteint exactement en $x = \alpha$. C'est un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$.

$$A(x) = -x^2 + 20x = -(x - 10)^2 + 100$$

aire maximale 100 pour $x = 10$

L'enclos rectangulaire de 40 m de clôture : le carré gagne toujours.

Couper une courbe et une droite

Deux courbes se coupent là où elles ont la même ordonnée. On écrit $f(x) = g(x)$, on ramène tout d'un côté, et l'on obtient une équation du second degré. ★

C'est le motif le plus fréquent où une telle équation SURGIT d'un problème au lieu d'être donnée.

$$x^2 - 3x + 1 = x - 2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \longrightarrow x = 1 \text{ ou } 3$$

Le nombre de points d'intersection est donné par le signe de Δ .

Exemples corrigés : le second degré

Résoudre, avec $\Delta > 0$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0.$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 49$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{4} \longrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2,5$$

$a = 2, b = -3, c = -5$. On calcule $\Delta = 9 + 40 = 49 > 0$, donc deux solutions. $\sqrt{49} = 7$, et $x = \frac{3 \pm 7}{4}$: on obtient $x_1 = \frac{-4}{4} = -1$ et $x_2 = \frac{10}{4} = 2,5$. ⚠ Le $-b$ de la formule vaut $+3$ ici : oublier ce changement de signe est l'erreur la plus fréquente.

Quand Δ est négatif

$$x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Combien de solutions ?

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20 = -16$$

$$\Delta < 0 \longrightarrow S = \emptyset$$

$\Delta = -16 < 0$: l'équation n'a AUCUNE solution réelle. ➡ On s'arrête là. Il ne faut surtout pas écrire $\sqrt{-16}$: la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans $\mathbb{R}$. Géométriquement, la parabole ne rencontre jamais l'axe des abscisses — et comme $a = 1 > 0$, le trinôme est strictement positif partout.

Le signe d'un trinôme

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3.$$

Étudier le signe de f sur $\mathbb{R}$.

$$\Delta = 16 - 12 = 4 \longrightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$$

$$f(x) = -(x - 1)(x - 3)$$

Les racines sont 1 et 3. Ici $a = -1 < 0$: le trinôme est **NÉGATIF** à l'extérieur des racines et **POSITIF** entre elles. Donc $f(x) < 0$ sur $] -\infty ; 1[$ et sur $] 3 ; +\infty [$, et $f(x) > 0$ sur $] 1 ; 3 [$. ⚠ Ne pas réciter « positif sauf entre les racines » : c'est le signe de a qui commande, et ici a est négatif.

Pour quelles valeurs de m ?

$$x^2 + mx + 9 = 0, \text{ où } m \text{ est un réel.}$$

Pour quelles valeurs de m l'équation a-t-elle deux solutions distinctes ?

$$\Delta = m^2 - 36$$

$$\Delta > 0 \iff m < -6 \text{ ou } m > 6$$

Ici Δ n'est pas un nombre, c'est une **EXPRESSION** en m : $\Delta = m^2 - 4 \times 1 \times 9 = m^2 - 36$. Deux solutions distinctes signifie $\Delta > 0$, donc $m^2 > 36$, c'est-à-dire $m < -6$ ou $m > 6$. ⚠ Le piège : se mettre à résoudre l'équation en x . L'inconnue de la QUESTION est m , pas x .

Pièges à éviter : le second degré

- ⚠ Si $\Delta < 0$, on s'arrête : $\sqrt{\Delta}$ n'existe pas. Il n'y a ni racine, ni factorisation.
- ⚠ Oublier les signes dans a, b, c : dans $2x^2 - 3x - 5$, $b = -3$ et $c = -5$.
- ⚠ Dans la formule, le numérateur commence par $-b$: pour $b = -3$, c'est $+3$.
- ⚠ « Du signe de a sauf entre les racines » — ce n'est PAS « toujours positif sauf entre ». Quand $a < 0$, tout s'inverse.
- ⚠ Une inéquation a pour solution un **INTERVALLE**, pas un nombre : on répond par $S =] \dots ; \dots [$.
- ⚠ Δ n'est pas le nombre de solutions : c'est son **SIGNE** qui le donne. $\Delta = 49$ ne veut pas dire 49 solutions.

À retenir : le second degré

$$\Delta = b^2 - 4ac, \text{ et c'est son SIGNE qui décide de tout.}$$

$\Delta > 0$: deux racines. $\Delta = 0$: une racine double. $\Delta < 0$: aucune.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ et } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

La forme factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$ n'existe QUE si $\Delta \geq 0$.

Un trinôme est du signe de a , sauf entre ses racines — s'il en a.

★ Trois écritures : développée pour $f(0)$, factorisée pour les racines, canonique pour le sommet.

Exercices corrigés : le second degré

1. Calculer le discriminant de $x^2 - 7x + 12$.

Correction :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 49 - 48 = 1. \text{ Il est positif : deux racines.}$$

2. Résoudre $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Correction :

$$\Delta = 1, \sqrt{\Delta} = 1, \text{ donc } x = \frac{7 \pm 1}{2} : x_1 = 3 \text{ et } x_2 = 4. \text{ (Somme 7, produit 12 : on pouvait les deviner.)}$$

3. Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$.

Correction :

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 : \text{ aucune solution réelle. } \ominus \text{ On ne calcule pas } \sqrt{-3}.$$

4. Résoudre $4x^2 - 12x + 9 = 0$.

Correction :

$$\Delta = 144 - 144 = 0 : \text{ une solution double, } x = \frac{12}{8} = 1,5. \text{ Le trinôme vaut } (2x - 3)^2.$$

5. Factoriser $2x^2 - 2x - 12$.

Correction :

$$\Delta = 4 + 96 = 100, x_1 = -2, x_2 = 3. \text{ Donc } 2x^2 - 2x - 12 = 2(x + 2)(x - 3). \text{ ⚠ Ne pas oublier le facteur } a = 2 \text{ devant.}$$

6. Donner la forme canonique de $x^2 - 6x + 11$, et en déduire son minimum.

Correction :

$$x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 - 9 + 11 = (x - 3)^2 + 2. \text{ Le minimum vaut 2, atteint en } x = 3.$$

7. Étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$.

Correction :

Racines 2 et 3, et $a = 1 > 0$: positif sur $] -\infty ; 2[$ et $] 3 ; +\infty[$, négatif sur $] 2 ; 3[$.

8. Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 6 \geq 0$.

Correction :

Racines -2 et 3 , et $a = -1 < 0$: le trinôme est positif ENTRE les racines. $S = [-2 ; 3]$, crochets fermés à cause du $\geq$.

9. Deux nombres ont pour somme 9 et pour produit 20. Lesquels ?

Correction :

Ce sont les racines de $x^2 - 9x + 20 = 0$: $\Delta = 81 - 80 = 1$, donc 4 et 5.

10. Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 + mx + 4 = 0$ n'a-t-elle aucune solution ?

Correction :

$\Delta = m^2 - 16 < 0$, soit $-4 < m < 4$. L'inconnue de la question est m , pas x .