

Les sections planes de solides

cours et exercices corrigés de maths 3e

Couper un solide et regarder la tranche : voilà tout le chapitre. La difficulté n'est pas le calcul, elle est de VOIR — une section est une figure plate, à deux dimensions, obtenue d'un objet qui en a trois. Et sa forme ne dépend pas seulement du solide : elle dépend surtout de la façon dont on le coupe.

PRÉREQUIS

Solides usuels, perspective cavalière, Pythagore

L'IDÉE CLÉ

La coupe décide de la forme, pas le solide seul

OUTIL

Se représenter le plan qui traverse

À quoi ça sert : les sections planes de solides

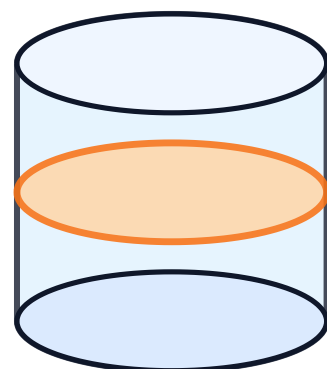
La section plane est le geste de la coupe technique. Un plan d'architecte montre une maison coupée verticalement ; une IRM produit des centaines de sections du corps, chacune plate ; un géologue lit une falaise comme la section d'un terrain. Et plus simplement : trancher un saucisson droit donne un disque, en biais un ovale — le même objet, deux formes, selon l'angle du couteau.

Un peu d'histoire : les sections planes de solides

Les sections du cône ont fasciné les Grecs bien avant d'être utiles : vers 200 avant notre ère, Apollonius de Perga montre qu'en inclinant le plan de coupe on obtient un cercle, une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Ces courbes semblaient purement théoriques. Dix-huit siècles plus tard, Kepler découvre que les planètes décrivent des ellipses : les sections coniques décrivaient le ciel sans que personne l'ait soupçonné.

Définition : les sections planes de solides

Faire une section plane d'un solide, c'est le couper par un plan et regarder la figure obtenue. Cette figure est toujours **PLANE** : elle n'a que deux dimensions, alors que le solide en a trois. Sa forme dépend à la fois du solide et de l'orientation du plan



de coupe — un même cylindre donne un disque ou un rectangle selon la façon dont on le tranche.

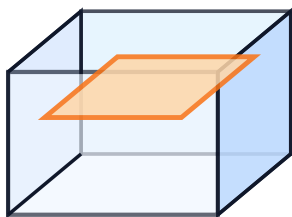
la tranche est PLATE : c'est une figure à deux dimensions

Le plan orange coupe le cylindre parallèlement à sa base. La section obtenue est un disque.

Propriétés : les sections planes de solides

Une section est toujours une figure plane

C'est le point de départ, et il se perd vite. Le solide a trois dimensions, la section n'en a que deux : c'est une figure de géométrie plane, comme celles qu'on trace au compas. On peut donc lui appliquer tout ce qu'on sait des rectangles, des disques et des triangles.



trois dimensions coupées, deux dimensions obtenues

La coupe décide autant que le solide

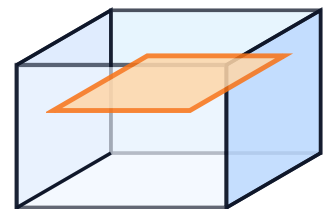
Un même solide donne des sections très différentes selon l'orientation du plan. C'est pourquoi la question n'est jamais « quelle est la section d'un cylindre » mais toujours « coupé COMMENT ». Dire qu'une section de cylindre est un disque est faux si la coupe contient l'axe.

le cylindre coupé	la section
parallèlement à la base	un disque
selon un plan contenant l'axe	un rectangle

même solide, deux formes

Pavé ou cube coupé parallèlement à une face

La section est un RECTANGLE, identique à la face à laquelle le plan est parallèle. Dans un cube, toutes les faces sont des carrés : la section est donc un carré. Croire qu'une section de pavé est toujours un triangle est une erreur classique.



un rectangle, de mêmes dimensions que la face

Cylindre coupé parallèlement à la base

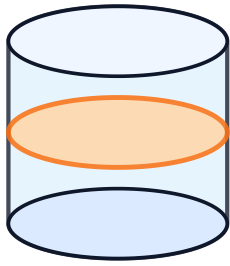
La section est un DISQUE, exactement de même rayon que la base. C'est le cas le plus simple : le plan glisse le long du cylindre sans jamais changer la forme obtenue, seulement sa hauteur.

Cylindre coupé selon un plan contenant l'axe

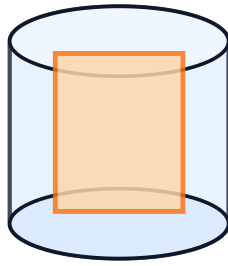
Ici la section est un RECTANGLE. Sa largeur vaut le diamètre du cylindre, sa hauteur celle du cylindre. C'est la coupe qu'on obtient en tranchant une boîte de conserve verticalement, en passant par le milieu.

Cône ou pyramide coupés parallèlement à la base

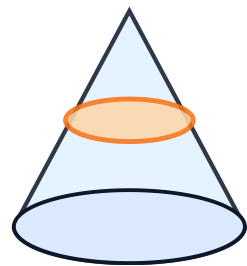
La section est une RÉDUCTION de la base : un disque plus petit pour le cône, un polygone semblable pour la pyramide. C'est une homothétie de centre le sommet — la même notion que dans le chapitre des transformations.



un disque, de même rayon que la base



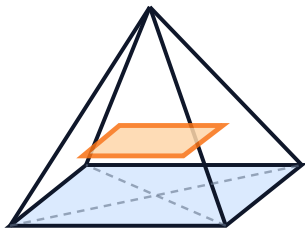
un rectangle : diamètre sur hauteur



un disque plus petit : une réduction de la base

La pyramide donne un polygone semblable

Coupée parallèlement à sa base, une pyramide donne un polygone de même forme que la base, mais plus petit. Si la base est un carré, la section est un carré ; si c'est un triangle, la section est un triangle.



même forme que la base, taille réduite

Dans la section, on calcule à plat

Une fois la section identifiée, on oublie le solide : c'est une figure plane ordinaire. Pour trouver la diagonale d'une section rectangulaire de 6 cm sur 8 cm, on applique Pythagore — et l'on trouve 10 cm, PAS $6 + 8 = 14$.

calcul	résultat
$6 + 8$	14 — FAUX
$\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100}$	10 cm

une diagonale se calcule, elle ne s'additionne pas

La formule : les sections planes de solides

LES SECTIONS À CONNAÎTRE

solide +
orientation du plan →
la forme

Pavé ou cube parallèlement à une face : rectangle (carré au cube).

solide	coupe	section
pavé	// face	rectangle
cube	// face	carré
cylindre	// base	disque
cylindre	axe	rectangle

Cylindre parallèlement à la base : disque ; selon l'axe : rectangle. Cône ou pyramide parallèlement à la base : une réduction de la base.

solide	coupe	section
cône	// base	disque réduit

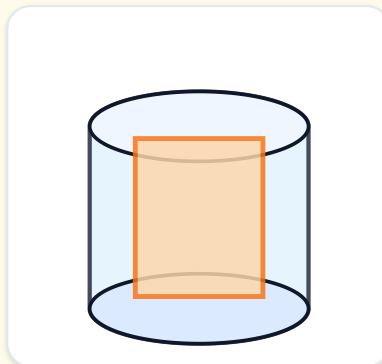
Méthode : les sections planes de solides

1. Repérer l'orientation du plan

Avant de nommer quoi que ce soit, on regarde COMMENT le plan traverse : parallèlement à une face, parallèlement à la base, ou en passant par l'axe. C'est cette orientation qui décide de la forme.

2. Nommer la forme obtenue

On applique la règle du solide concerné. Un doute se lève en imaginant le plan qui glisse : la forme change-t-elle ? Si non, c'est que la coupe est parallèle à une face ou à la base.



le plan passe par l'axe : rectangle

3. Dessiner la section à plat

On la redessine SÉPARÉMENT du solide, en vraie grandeur, avec ses dimensions. C'est ce dessin-là qui sert au calcul — pas la perspective, où les longueurs sont déformées.

4. Calculer dans le plan

Une fois à plat, on emploie les outils de géométrie plane : Pythagore pour une diagonale, la formule de l'aire du rectangle ou du disque. Le solide n'intervient plus.

Selon ce que l'on cherche : les sections planes de solides

On demande la forme de la section

On demande une longueur dans la section

On demande une aire

On identifie le solide ET l'orientation du plan, puis on applique la règle correspondante.

On redessine la section à plat avec ses dimensions, puis on calcule comme en géométrie plane.

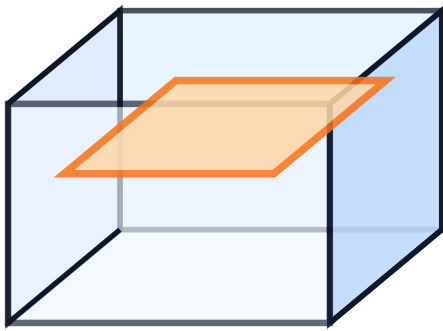
Même geste : la section est un rectangle, un carré ou un disque — on emploie sa formule d'aire habituelle.

Exemples corrigés : les sections planes de solides

Un cube coupé parallèlement à une face

Un cube d'arête 5 cm, coupé par un plan parallèle à l'une de ses faces.

Quelle est la forme de la section, et ses dimensions ?



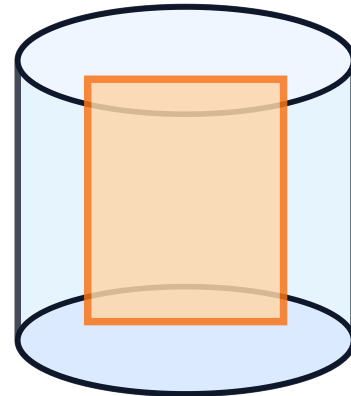
un carré de 5 cm de côté

La section est identique à la face à laquelle le plan est parallèle. Les faces d'un cube sont des carrés de 5 cm de côté : la section est donc un carré de 5 cm de côté, quelle que soit la hauteur de la coupe.

Un cylindre, deux coupes

Un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm. On le coupe d'abord parallèlement à sa base, puis selon un plan contenant son axe.

Quelles sont les deux sections ?



la seconde coupe : un rectangle de 6 sur 10

Parallèlement à la base : un disque de rayon 3 cm, comme la base. Selon un plan contenant l'axe : un rectangle de 6 cm de large (le diamètre) et 10 cm de haut. Le même solide donne deux formes différentes — c'est la coupe qui décide.

La diagonale d'une section

La section d'un pavé est un rectangle de 6 cm sur 8 cm.

Combien mesure sa diagonale ?

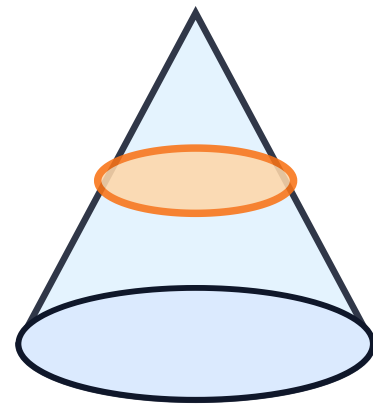
La section est une figure plane : on y applique Pythagore. La diagonale d vérifie $d^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, donc $d = 10$ cm. Ce n'est PAS $6 + 8 = 14$:

Un cône coupé parallèlement à sa base

Un cône de rayon 6 cm, coupé à mi-hauteur par un plan parallèle à sa base.

Quelle est la section ?

une diagonale est toujours plus courte que la somme des deux côtés.



un disque réduit de moitié

C'est un disque, réduction de la base. La coupe étant à mi-hauteur, le rapport de réduction est $1/2$: le disque obtenu a pour rayon 3 cm. C'est une homothétie de centre le sommet du cône.

Pièges à éviter : les sections planes de solides

Croire qu'une section de cylindre est toujours un disque : coupé selon son axe, il donne un rectangle.

Croire qu'une section de pavé est toujours un triangle : parallèlement à une face, c'est un rectangle.

Oublier que la section est PLANE : elle n'a que deux dimensions, et se calcule comme une figure plate.

Additionner les côtés pour trouver une diagonale : 6 et 8 donnent 10 par Pythagore, jamais 14.

Calculer sur la perspective : les longueurs y sont déformées. On redessine la section à plat d'abord.

Répondre « quelle est la section de ce solide » sans regarder l'orientation du plan : la question n'a pas de réponse sans elle.

À retenir : les sections planes de solides

Une section plane est une figure à DEUX dimensions, obtenue d'un solide qui en a trois.

Sa forme dépend du solide ET de l'orientation du plan de coupe.

Pavé ou cube parallèlement à une face : un rectangle, un carré pour le cube.

Cylindre parallèlement à la base : un disque ; selon un plan contenant l'axe : un rectangle.

Cône ou pyramide parallèlement à la base : une réduction de la base.

On redessine la section à plat avant de calculer, et on y applique Pythagore ou les formules d'aire.

Exercices corrigés : les sections planes de solides

1. Une section plane est-elle un objet à deux ou à trois dimensions ?

Correction :

À deux. Le solide en a trois, mais la figure obtenue par la coupe est plate : c'est une figure de géométrie plane.

2. Quelle est la section d'un cube par un plan parallèle à une face ?

Correction :

Un carré, identique à cette face. Les faces d'un cube étant toutes des carrés, la section l'est aussi.

3. Un élève dit : « Toute section d'un cylindre est un disque. » A-t-il raison ?

Correction :

Non. C'est vrai pour une coupe parallèle à la base, mais un plan contenant l'axe donne un RECTANGLE, de largeur le diamètre et de hauteur celle du cylindre.

4. Quelle est la section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base ?

Correction :

Un polygone semblable à la base, mais plus petit : c'est une réduction de la base, par une homothétie de centre le sommet.

5. Dans une section rectangulaire de 6 cm sur 8 cm, combien mesure la diagonale ?

Correction :

On applique Pythagore : $d^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, donc $d = 10$ cm. Additionner les côtés donnerait 14, ce qui est faux.

6. Pourquoi la section d'un pavé droit par un plan parallèle à une face est-elle un rectangle ?

Correction :

Parce que le plan coupe les quatre faces latérales perpendiculaires, en suivant exactement la forme de la face à laquelle il est parallèle. La section reproduit donc cette face.