

Le signe d'une expression

cours et exercices corrigés de maths 2nde

Un même tableau répond à deux questions : « où l'expression s'annule-t-elle ? » — c'est l'équation $f(x) = 0$ — et « où est-elle positive ? » — c'est l'inéquation. Le premier se lit sous les zéros, le second se lit dans les colonnes.

MOTS CLÉS

Racine, facteur, produit, quotient, valeur interdite

LE SECRET

Une racine coupe la droite en deux

OUTIL

Le tableau de signes

À quoi ça sert : le signe d'une expression

Une entreprise réunionnaise modélise son bénéfice par $B(x) = (x - 20)(60 - x)$, où x est le nombre de milliers d'articles vendus. Chercher quand elle gagne de l'argent, c'est résoudre $B(x) > 0$ — un tableau de signes donne la réponse : entre 20 000 et 60 000 articles.

Un peu d'histoire : le signe d'une expression

La règle des signes a longtemps gêné : au XVII^e siècle encore, on peinait à admettre que « moins par moins donne plus ». Il a fallu attendre que les négatifs cessent d'être vus comme des nombres « absurdes » pour que le tableau de signes devienne un outil banal.

Définition : le signe d'une expression

Étudier le signe d'une expression, c'est dire pour quelles valeurs de x elle est positive, négative ou nulle. Une expression du premier degré $ax + b$ ne change de signe qu'UNE fois : à sa racine, la valeur qui l'annule. Cette racine coupe la droite des réels en deux morceaux.

Signe de $x - 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x - 2$	-	0	+

Une racine, deux colonnes. Le zéro se pose SOUS la valeur qui annule, jamais ailleurs.

Propriétés : le signe d'une expression

Le signe de $ax + b$

C'est le signe de a qui décide de l'ordre. Si $a > 0$: négatif puis positif. Si $a < 0$: positif puis négatif.

Ici $a = -2$: l'ordre est inversé

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-2x + 6$	+	0	-

Le produit

Chaque facteur a SA ligne et SON zéro. La dernière ligne est le produit des lignes du dessus, colonne par colonne.

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x + 1$		$-$ 0 $+$	$+$	
$x - 4$	$-$		$-$ 0 $+$	
$(x + 1)(x - 4)$	$+$	0	$-$ 0	$+$

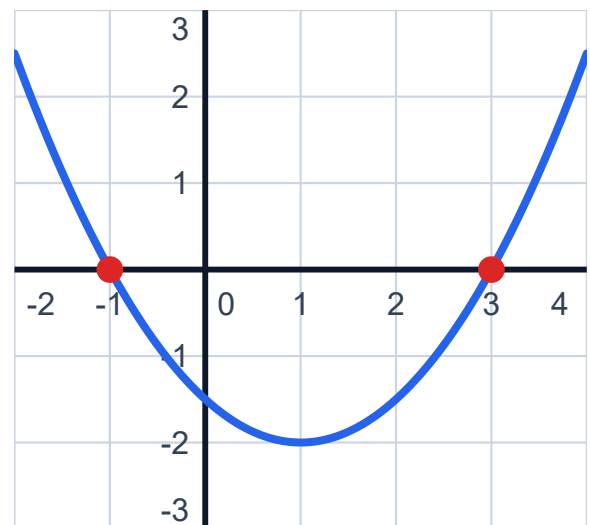
La valeur interdite

Sur un quotient, ce qui annule le DÉNOMINATEUR est interdit : le quotient n'existe pas. On marque une double barre, jamais un zéro.

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x + 1$		$-$ 0 $+$	$+$	
$x - 4$		$-$	$-$ 0 $+$	
$\frac{x + 1}{x - 4}$		$+$ 0 $-$	$\parallel$	$+$

Le signe se lit aussi sur une courbe

Au-dessus de l'axe des abscisses : positif. En dessous : négatif. Attention, « la courbe monte » décrit les variations, pas le signe.



Méthode : le signe d'une expression

1. Je cherche les racines

J'annule chaque facteur séparément. $x + 1 = 0$ donne -1 , $x - 4 = 0$ donne 4 . Deux facteurs, deux racines.

Le premier facteur, seul

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+

2. Je range et je compte les colonnes

Les racines se rangent dans l'ordre CROISSANT, pas dans l'ordre où les facteurs sont écrits. Deux racines donnent trois colonnes.

Trois colonnes pour deux racines

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+

3. Je remplis, puis je multiplie

Une ligne par facteur, un seul zéro par ligne. Puis la ligne du bas : je multiplie les signes colonne par colonne.

$\mathbf{x}$	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$x + 1$		$\textcolor{red}{-}$ $\mathbf{0}$ $\textcolor{teal}{+}$	$\textcolor{teal}{+}$	
$x - 4$		$\textcolor{red}{-}$	$\textcolor{red}{-}$ $\mathbf{0}$ $\textcolor{teal}{+}$	
$f(x)$		$\textcolor{teal}{+}$ $\mathbf{0}$ $\textcolor{red}{-}$	$\mathbf{0}$ $\textcolor{teal}{+}$	

Selon ce que l'on cherche : le signe d'une expression

Résoudre une équation

$f(x) = 0$: je lis les ZÉROS de la dernière ligne. Une double barre n'est jamais solution.

Solutions : -1 et 4

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Résoudre une inéquation

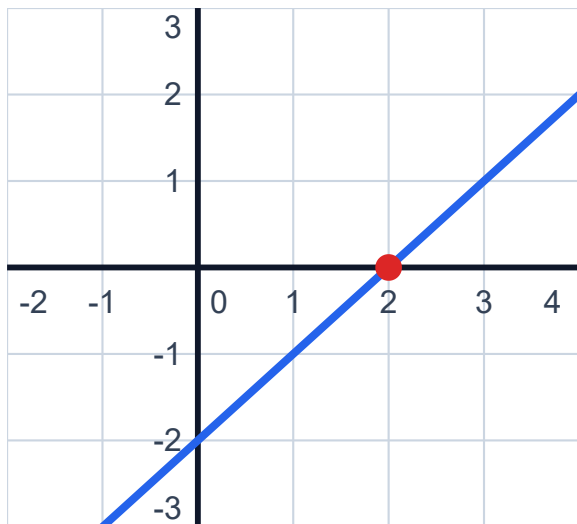
$f(x) > 0$: je garde les colonnes marquées $+$. Elles peuvent former DEUX intervalles séparés.

$] -\infty ; -1[\cup] 4 ; +\infty [$

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$		
$f(x)$		$\color{green}+$	$\mathbf{0}$	$\color{red}-$	$\mathbf{0}$	$\color{green}+$

Partir d'une courbe

Pas de calcul : je repère où la courbe traverse l'axe, puis de quel côté elle se trouve.



Exemples corrigés : le signe d'une expression

Un facteur seul

$$f(x) = -3x + 9.$$

Quel est le signe de f ?

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-3x + 9$		+ 0 -	

$-3x + 9 = 0$ donne $x = 3$. Le coefficient -3 est **NÉGATIF**, donc l'ordre est inversé : f est positive avant 3, négative après.

Un quotient

$$g(x) = \frac{x - 2}{x + 3}.$$

Où g n'existe-t-elle pas, et quel est son signe ?

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x - 2$		-	- 0 +	
$x + 3$		- 0 +	+	
$g(x)$	+	 	- 0 +	

$x + 3 = 0$ donne $x = -3$: c'est la valeur **INTERDITE**, marquée par une double barre. g est positive sur $] -\infty ; -3[$, négative sur $] -3 ; 2[$, positive après 2.

Résoudre une équation

$$h(x) = (2x - 6)(x + 1).$$

Résoudre $h(x) = 0$.

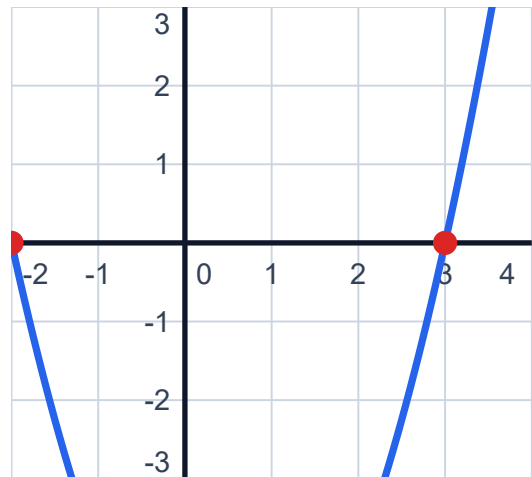
$\mathbf{x}$	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$h(x)$		$\mathbf{+}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{+}$

Un produit est nul dès qu'un facteur l'est. $2x - 6 = 0$ donne $x = 3$, et $x + 1 = 0$ donne $x = -1$. Les solutions sont -1 et 3 — les deux zéros de la dernière ligne.

Lire une inéquation sur une courbe

La courbe de u coupe l'axe en -2 et en 3 .

Résoudre $u(x) \leq 0$.



La parabole est tournée vers le haut : elle plonge sous l'axe ENTRE ses deux racines. Comme l'inégalité est large, les bornes sont incluses : $[-2 ; 3]$.

Pièges à éviter : le signe d'une expression

- ❌ La DOUBLE BARRE n'est pas un zéro. Sous elle, la fonction n'existe pas : ce n'est jamais une solution de $f(x) = 0$, et la borne reste exclue même avec $\leq$ ou $\geq$.
- ❌ Ne jamais multiplier une inéquation par $x - a$: on ignore son signe, et multiplier par un négatif RETOURNE l'inégalité. C'est précisément pour éviter cela qu'on dresse un tableau.
- ❌ Les racines se rangent dans l'ordre CROISSANT, pas dans l'ordre où les facteurs sont écrits. $(x - 6)(x + 2)$ commence par -2 dans le tableau.
- ❌ « La courbe monte » décrit les VARIATIONS, pas le signe. Une droite peut monter en restant tout entière sous l'axe.
- ❌ Les solutions d'une inéquation forment souvent DEUX intervalles séparés. N'en garder qu'un est l'oubli le plus fréquent.

À retenir : le signe d'une expression

Une racine coupe la droite en deux : n racines donnent $n + 1$ colonnes.

Le signe de $ax + b$ suit le signe de a : positif, c'est $-$ puis $+$; négatif, c'est l'inverse.

Une ligne par facteur, UN SEUL zéro par ligne $-$ sous sa propre racine.

La dernière ligne est le produit des lignes du dessus, colonne par colonne.

Numérateur qui s'annule $\rightarrow$ un 0. Dénominateur qui s'annule $\rightarrow$ une double barre.

Sur une courbe : au-dessus de l'axe des abscisses, positif ; en dessous, négatif.

Exercices corrigés : le signe d'une expression

1. En quelle valeur $5x - 15$ s'annule-t-elle ?

Correction :

On résout $5x - 15 = 0$, donc $5x = 15$ et $x = 3$. Elle s'annule en 3.

2. Quel est le signe de $-4x + 8$ avant et après sa racine ?

Correction :

La racine : $-4x + 8 = 0$ donne $x = 2$. Le coefficient -4 est négatif, donc l'ordre est inversé : POSITIF avant 2, NÉGATIF après.

3. Combien de colonnes de signes le tableau de $(x - 1)(x + 5)(x - 7)$ doit-il avoir ?

Correction :

Trois facteurs donnent trois racines : 1, -5 et 7. Trois racines découpent QUATRE intervalles. Le tableau a donc 4 colonnes de signes $-$ toujours une de plus que le nombre de racines.

4. Dans le tableau de $(x - 6)(x + 2)$, quelle est la première ligne, de gauche à droite ?

Correction :

Les racines sont 6 et -2 . On les range dans l'ordre CROISSANT, pas dans l'ordre d'écriture : $-\infty$, -2 , 6, $+\infty$.

5. Dans un tableau, la ligne de $x - 3$ vaut $-$ puis $+$, et celle de $x + 1$ vaut $-$ puis $+$ puis $+$. Que vaut le produit dans la première colonne ?

Correction :

Dans la première colonne, les deux facteurs sont négatifs. Deux signes identiques donnent $+$: le produit est POSITIF.

6. Quelle est la valeur interdite de $\frac{x+4}{2x-10}$?

Correction :

On annule le DÉNOMINATEUR : $2x - 10 = 0$ donne $x = 5$. La valeur interdite est 5 — sous elle, on écrit une double barre, jamais un zéro.

7. Sur le tableau d'un quotient, -2 porte un zéro et 7 porte une double barre. Quelles sont les solutions de $f(x) = 0$?

Correction :

Seul un ZÉRO donne une solution. En 7, la fonction n'existe pas : ce n'est pas une solution. La seule solution est -2 .

8. Résoudre $(x+3)(x-5) = 0$.

Correction :

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. $x + 3 = 0$ donne $x = -3$; $x - 5 = 0$ donne $x = 5$. Les solutions sont -3 et 5.

9. La dernière ligne d'un tableau vaut $+$, $-$, $+$ avec les racines -1 et 4. Résoudre $f(x) > 0$.

Correction :

On garde les colonnes marquées $+$: avant -1 et après 4. L'inégalité est stricte, donc les bornes sont exclues : $] -\infty ; -1[\cup] 4 ; +\infty[$. Deux intervalles, pas un — oublier le second est l'erreur classique.

10. Même tableau, mais 4 porte une **DOUBLE BARRE** au lieu d'un zéro. Résoudre $f(x) \geq 0$.

Correction :

L'inégalité est large, donc les zéros sont inclus : -1 entre dans les solutions. Mais 4 est une valeur **INTERDITE** : la fonction n'y existe pas, elle reste exclue même avec $\geq$. Solutions : $] -\infty ; -1] \cup] 4 ; +\infty [$.