

Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

cours et exercices corrigés de maths 3e

« Le salaire moyen de cette entreprise est de 4 000 € ». La phrase est peut-être exacte, et pourtant presque personne n'y gagne cette somme — il suffit que trois dirigeants tirent la moyenne vers le haut. Calculer une moyenne, une médiane et une étendue, vous savez le faire. Ce que la troisième ajoute est plus difficile et plus utile : savoir LEQUEL de ces trois nombres dit la vérité sur une série, et ce que chacun cache.

LA MOYENNE

La somme divisée par l'effectif — sensible aux valeurs extrêmes

LA MÉDIANE

La valeur qui coupe la série en deux moitiés — elle, résiste

L'ÉTENDUE

La plus grande moins la plus petite : elle mesure la DISPERSION

À quoi ça sert : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

L'écart entre moyenne et médiane est l'un des chiffres les plus politiques qui soient. Quand on annonce le « revenu moyen » des ménages, quelques très hauts revenus suffisent à le tirer vers le haut, et il devient supérieur à ce que gagne la majorité ; le revenu MÉDIAN, lui, désigne la personne exactement au milieu, et il est toujours plus bas. Les deux chiffres sont exacts, et ils racontent deux histoires différentes — savoir lequel on vous présente est donc une compétence de citoyen autant que de mathématicien. La même prudence vaut pour une moyenne de classe, une durée moyenne de trajet, ou le prix moyen d'un logement à Saint-Denis.

Un peu d'histoire : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

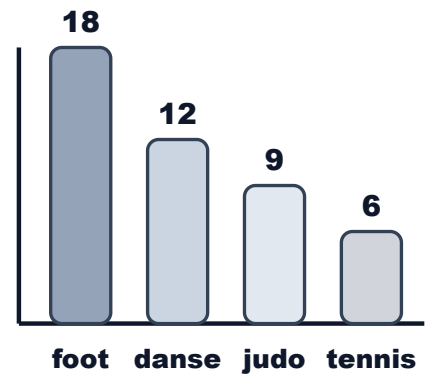
La médiane apparaît tardivement, et c'est révélateur : jusqu'au XIX^e siècle, la moyenne règne seule, parce qu'on la croyait toujours représentative. C'est Francis Galton, vers 1880, qui popularise l'idée qu'une valeur centrale de RANG peut mieux décrire une population qu'une valeur centrale de somme. L'histoire donne d'ailleurs raison à cette prudence par un contre-exemple célèbre : le statisticien belge Adolphe Quetelet avait construit un « homme moyen » à partir de moyennes de tailles, de poids et de mesures diverses — un individu qui n'existait nulle part, et qui ne ressemblait à personne.

Définition : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

Une série statistique est un ensemble de valeurs relevées sur une population. Pour la résumer, on dispose de deux sortes d'indicateurs, et il faut les distinguer. Les indicateurs de POSITION — la moyenne et la médiane — donnent une valeur centrale, autour de laquelle la série se tient.

L'indicateur de DISPERSION — l'étendue — dit au contraire à quel point les valeurs s'écartent les unes des autres. Un seul de ces nombres ne suffit jamais à décrire une série : il en faut au moins un de chaque sorte.

Activités choisies



La hauteur de chaque barre est un **EFFECTIF** : le nombre d'élèves qui ont choisi l'activité.

L'effectif total vaut $18 + 12 + 9 + 6 = 45$ élèves.

Propriétés : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

Effectif et fréquence ne sont pas le même nombre

L'EFFECTIF est un comptage : 12 élèves font du basket. La FRÉQUENCE est une proportion : ces 12 élèves rapportés au total. Dans une classe de 30, la fréquence vaut $\frac{12}{30} = 0,4$, soit 40 %. ➡ Répondre « la fréquence est 12 » confond les deux — et le contrôle est immédiat, puisqu'une fréquence est toujours comprise entre 0 et 1.

	ce que c'est	e
effectif	un comptage	1
fréquence	une proportion	
en %	$\times 100$	

une fréquence tient entre 0 et 1

Un effectif se compte en individus ; une fréquence n'a pas d'unité.

Lire un tableau, lire un graphique

Dans un tableau, chaque colonne porte une catégorie et son effectif ; l'effectif total est la somme de tous. Dans un diagramme en barres, c'est la HAUTEUR qui porte l'effectif — la barre la plus haute désigne la catégorie la plus représentée, la plus basse la moins choisie. Un diagramme circulaire, lui, montre des PARTS, donc des fréquences plutôt que des effectifs.

représentation	ce qu'on lit
tableau	des effectifs
barres	la hauteur = l'effectif
camembert	des parts, donc des %

chaque forme dit autre chose

Le camembert compare des proportions ; les barres comparent des nombres.

La moyenne : tout partager également

On additionne toutes les valeurs, puis on divise par leur nombre. Pour 8, 10 et 12 : la somme vaut 30, et $30 \div 3 = 10$. ➡ Répondre 30 oublie la division — et une moyenne plus grande que toutes les valeurs de la série est impossible. Quand une valeur se répète, on la compte autant de fois : dix élèves à 12 et cinq à 18 donnent $\frac{10 \times 12 + 5 \times 18}{15} = 14$.

étape	calcul
la somme	$8 + 10 + 12 = 30$
le nombre	3 valeurs
la moyenne	$30 \div 3 = 10$

la division n'est pas facultative

Une moyenne tombe toujours ENTRE la plus petite et la plus grande valeur.

La médiane : couper la série en deux

La médiane est la valeur qui partage la série en deux groupes de même effectif. ➖ Elle exige de RANGER les valeurs d'abord — sans quoi le résultat n'a aucune raison d'être juste, même s'il l'est parfois par chance. Une fois rangée : si le nombre de valeurs est impair, la médiane est celle du milieu ; s'il est pair, c'est la moyenne des deux valeurs centrales.

série rangée	médiane
4 ; 7 ; 9 ; 12 ; 15	9 — celle du milieu
4 ; 8 ; 10 ; 14	$(8+10) \div 2 = 9$

impair : une valeur · pair : leur moyenne

Ranger d'abord : c'est la seule étape qu'on saute, et celle qui rend la méthode juste.

L'étendue : mesurer l'écart, pas le centre

L'étendue est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur : pour 4, 7, 9 et 15, elle vaut $15 - 4 = 11$. ➖ Ce n'est pas une somme — écrire $5 + 8 + 12 = 25$ pour la série 5, 8, 12 additionne ce qu'il fallait soustraire. Et l'étendue ne dit rien du centre : elle dit si les valeurs sont RESSERRÉES ou ÉTALÉES.

série	étendue	ce qu'elle dit
10 ; 11 ; 12	2	très régulière
2 ; 11 ; 20	18	très dispersée

même centre, dispersion opposée

Ces deux séries ont la même moyenne, 11 — et n'ont rien à voir.

La moyenne seule ment

C'est le cœur du chapitre. Deux classes peuvent avoir exactement la même moyenne de 12 et des résultats totalement différents : si la première a une étendue de 4, ses notes sont groupées entre 10 et 14 ; si la seconde a une étendue de 16, elle mêle des 4 et des 20. La moyenne ne distingue pas ces deux situations. Il faut donc TOUJOURS l'accompagner d'un indicateur de dispersion.

classe	moyenne	étendue
A	12	4
B	12	16

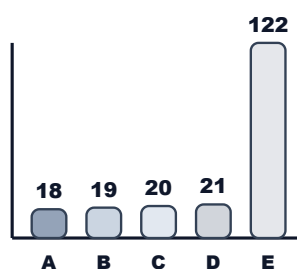
la moyenne ne les distingue pas

Un seul nombre ne décrit jamais une série : il en faut deux.

La médiane résiste, la moyenne cède

Une valeur extrême — un très gros salaire, une note aberrante — déplace fortement la MOYENNE, car elle entre dans la somme avec tout son poids. La MÉDIANE, elle, ne compte que les rangs : une valeur énorme reste une valeur parmi d'autres, et ne décale la coupure que d'un cran. C'est pourquoi on parle du salaire MÉDIAN quand on veut décrire ce que gagne une personne ordinaire.

Cinq salaires, en milliers



Moyenne : 40. Médiane : 20.
Quatre personnes sur cinq gagnent moins que la moyenne.

Choisir son indicateur selon la question

Chaque indicateur répond à une question différente, et l'énoncé indique laquelle. « Quel est le total réparti également ? » appelle la moyenne. « Quelle valeur partage la population en deux moitiés ? » appelle la médiane. « Les valeurs sont-elles regroupées ou étalées ? » appelle l'étendue. Prendre le mauvais indicateur donne un nombre exact qui répond à côté.

la question	l'indicateur
le total partagé	la moyenne
couper en deux	la médiane
étalé ou groupé ?	l'étendue
une valeur extrême	plutôt la médiane

le verbe de la question tranche

Un nombre juste qui répond à la mauvaise question reste une mauvaise réponse.

La formule : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la

résumé

LES TROIS INDICATEURS, ET CE QUE CHACUN MESURE

$$\begin{array}{l} \text{moyenne} = \\ \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{effectif total}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{étendue} = \\ \text{max} - \text{min} \end{array}$$

La médiane, elle, ne se calcule pas par une formule : elle se LIT sur la série rangée, à la position du milieu.

⚠ C'est justement ce qui la rend insensible aux valeurs extrêmes — elle ne regarde que les rangs, jamais les montants.

indicateur	il mesure
moyenne	une position
médiane	une position
étendue	une dispersion

deux positions, une dispersion

Il faut un indicateur de chaque sorte pour décrire honnêtement une série.

Méthode : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la

résumé

1. Ranger avant toute médiane

C'est l'étape qu'on saute, et elle n'est pas facultative. Une médiane trouvée sur une série non rangée peut tomber juste par hasard, mais la méthode est fausse — et elle échouera à la question suivante.

2. Contrôler une moyenne par encadrement

Une moyenne tombe toujours entre la plus petite et la plus grande valeur de la série. Si le résultat sort de cet intervalle, c'est qu'on a oublié de diviser, ou mal compté l'effectif.

3. Compter les valeurs répétées autant de fois

Quand un tableau donne des effectifs, chaque valeur pèse selon le sien : on multiplie avant d'additionner, et l'on divise par l'effectif TOTAL, pas par le nombre de lignes du tableau.

4. Vérifier qu'une fréquence tient entre 0 et 1

Une fréquence est une proportion : elle ne peut ni dépasser 1, ni être négative. Un résultat supérieur à 1 signale qu'on a divisé à l'envers, ou donné l'effectif à la place.

5. Se demander ce que la question veut savoir

Avant de calculer, on identifie s'il s'agit d'une position ou d'une dispersion. Et s'il y a une valeur manifestement extrême, on préfère la médiane — ou l'on donne les deux, en disant pourquoi elles diffèrent.

Selon ce que l'on cherche : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

On me demande une valeur « typique »

Moyenne s'il n'y a pas de valeur extrême, médiane s'il y en a une. Et je peux dire pourquoi.

On me demande si les valeurs sont regroupées

C'est l'étendue : la plus grande moins la plus petite.

On me donne un tableau d'effectifs

Je multiplie chaque valeur par son effectif, j'additionne, puis je divise par l'effectif total.

On me demande une proportion

C'est une fréquence : l'effectif de la catégorie divisé par l'effectif total, éventuellement multiplié par 100.

On me donne un graphique

Je lis les hauteurs comme des effectifs, et je peux en tirer le total, la plus grande valeur, ou l'étendue.

Exemples corrigés : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

Moyenne, médiane et étendue d'une même série

Les notes d'un élève : 6 ; 9 ; 9 ; 12 ; 14.

Calculer les trois indicateurs.

indicateur	valeur
moyenne	$50 \div 5 = 10$
médiane	9
étendue	$14 - 6 = 8$

trois nombres, trois questions

Moyenne et médiane ne coïncident presque jamais.

La série est déjà rangée, ce qu'il faut vérifier avant tout. La MOYENNE : la somme vaut $6 + 9 + 9 + 12 + 14 = 50$, et il y a 5 notes, donc $50 \div 5 = 10$. La MÉDIANE : cinq valeurs, donc un nombre impair — c'est celle du milieu, la troisième, soit 9. L'ÉTENDUE : $14 - 6 = 8$. On remarque que moyenne et médiane diffèrent d'un point : la série penche légèrement vers le haut, parce que le 14 tire la moyenne sans déplacer la coupure.

Une moyenne avec des effectifs

Dans une classe, 10 élèves ont eu 12/20 et 5 élèves ont eu 18/20.

Quelle est la moyenne de la classe ?

Chaque note compte autant de fois qu'il y a d'élèves qui l'ont obtenue. La somme vaut donc $10 \times 12 + 5 \times 18 = 120 + 90 = 210$. L'effectif TOTAL est de $10 + 5 = 15$ élèves — et non 2, qui serait le nombre de lignes du tableau. La moyenne vaut $210 \div 15 = 14$. Contrôle : 14 est bien compris entre 12 et 18, et plus proche de 12, ce qui est cohérent puisque deux fois plus d'élèves ont eu cette note.

Le salaire typique

Cinq salaires mensuels dans une petite entreprise : 1 800 € ; 1 900 € ; 2 000 € ; 2 100 € ; 12 200 €.

Quel indicateur décrit le mieux ce qu'on y gagne ?

La moyenne vaut

$$\frac{1800 + 1900 + 2000 + 2100 + 12200}{5} = \frac{20000}{5} = 4000 \text{ €}.$$

Or QUATRE personnes sur cinq gagnent moins de la moitié de cette somme : la moyenne ne décrit personne, parce que le salaire du dirigeant entre dans la somme avec tout son poids.

La MÉDIANE, elle, est la troisième valeur de la série rangée, soit 2 000 € — et celle-là décrit bien la situation ordinaire. C'est donc la médiane qu'il faut annoncer, et l'écart entre les deux chiffres est lui-même une information : il signale la présence d'une valeur extrême.

Deux classes, une même moyenne

La classe A a une moyenne de 12 et une étendue de 4.

La classe B a la même moyenne, mais une étendue de 16

Dans laquelle les notes sont-elles les plus homogènes ?

Dans la classe A. L'étendue mesure l'écart entre la meilleure et la moins bonne note : 4 points seulement en A, ce qui signifie des notes groupées — par exemple entre 10 et 14. En B, 16 points d'écart laissent supposer des 4 et des 20 dans la même classe. ★ Les deux moyennes sont pourtant identiques : cet exemple montre qu'une moyenne, seule, ne permet PAS de décrire une série. Il faut toujours l'accompagner d'un indicateur de dispersion.

Pièges à éviter : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

Confondre effectif et fréquence : 12 élèves sur 30 donnent une fréquence de 0,4, pas de 12. Une fréquence tient toujours entre 0 et 1.

Oublier de diviser : la moyenne de 5 ; 10 ; 15 vaut 10, pas 30. Une moyenne ne dépasse jamais la plus grande valeur.

Additionner pour trouver l'étendue. C'est une SOUSTRACTION : la plus grande moins la plus petite.

Chercher la médiane sans ranger la série. La réponse peut tomber juste par hasard, mais la méthode est fautive.

Diviser par le nombre de lignes du tableau au lieu de l'effectif total, quand des valeurs se répètent.

Croire que la moyenne décrit toujours la situation ordinaire. Une seule valeur extrême suffit à la rendre trompeuse.

Donner un seul indicateur. Une position sans dispersion ne dit rien de la forme de la série.

À retenir : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

Effectif : un comptage. Fréquence : une proportion, entre 0 et 1.

Moyenne : la somme divisée par l'effectif total — jamais le nombre de lignes.

Médiane : la valeur du milieu, sur la série RANGÉE.

Étendue : la plus grande moins la plus petite. Elle mesure la dispersion.

Une valeur extrême déplace la moyenne, mais presque pas la médiane.

Deux séries de même moyenne peuvent tout avoir de différent : il faut deux indicateurs.

Exercices corrigés : Statistiques : lire une série, et choisir ce qui la résume

1. Dans un tableau statistique, que représente l'effectif d'une catégorie ?

Correction :

Le nombre d'individus qui appartiennent à cette catégorie. C'est un comptage, pas une proportion.

2. Dans une classe de 25 élèves, 10 pratiquent un sport. Quelle est la fréquence sous forme décimale ?

Correction :

$\frac{10}{25} = 0,4$. Elle est bien comprise entre 0 et 1, ce qui est le contrôle à faire.

3. Un élève dit : « dans une classe de 30 élèves, 12 font du basket, donc la fréquence est 12 ». A-t-il raison ?

Correction :

Non : 12 est l'EFFECTIF. La fréquence est $\frac{12}{30} = 0,4$, soit 40 %. Une fréquence ne dépasse jamais 1.

4. Quelle est la moyenne de 8 ; 10 ; 12 ?

Correction :

La somme vaut 30, il y a 3 valeurs, donc la moyenne est $30 \div 3 = 10$.

5. Quelle est la médiane de la série rangée 4 ; 7 ; 9 ; 12 ; 15 ?

Correction :

Cinq valeurs, donc un nombre impair : la médiane est celle du milieu, soit 9. Deux valeurs se trouvent en dessous, deux au-dessus.

6. Quelle est la médiane de la série rangée 4 ; 8 ; 10 ; 14 ?

Correction :

Quatre valeurs, donc un nombre pair : la médiane est la moyenne des deux valeurs centrales, $(8 + 10) \div 2 = 9$.

7. Quelle est l'étendue de la série 4 ; 7 ; 9 ; 15 ?

Correction :

$15 - 4 = 11$. C'est une soustraction entre la plus grande et la plus petite valeur, jamais une somme.

8. Série A : 10 ; 11 ; 12. Série B : 2 ; 11 ; 20. Laquelle est la plus régulière ?

Correction :

La série A, dont l'étendue vaut 2 contre 18 pour la série B. Leurs moyennes sont pourtant identiques, toutes deux égales à 11 : c'est bien la dispersion qui les distingue.

9. Dans une série, une valeur très grande apparaît. Quel indicateur est le plus modifié ?

Correction :

La moyenne, car cette valeur entre dans la somme avec tout son poids. La médiane ne compte que les rangs : elle ne se décale que d'un cran.

10. Pour décrire le salaire typique d'une entreprise où quelques dirigeants gagnent énormément, quel indicateur choisir ?

Correction :

La médiane. La moyenne serait tirée vers le haut par les hauts salaires et ne décrirait la situation de personne. La médiane désigne la personne exactement au milieu.