

La symétrie axiale

La symétrie axiale, c'est le miroir des mathématiques : une droite, l'axe, sépare une figure de son reflet. En 6e, on apprend à la reconnaître, à construire l'image d'un point ou d'une figure, à utiliser ses propriétés et à trouver les axes des figures usuelles.

PRÉREQUIS

Se repérer sur un quadrillage, tracer une droite perpendiculaire

IDÉE CLÉ

L'axe joue le rôle d'un miroir : l'image est le reflet de la figure

OUTIL

Le pliage : la figure et son image se superposent le long de l'axe

À quoi ça sert ?

La symétrie axiale est partout autour de nous : les ailes d'un papillon sont l'image l'une de l'autre par rapport au corps, une façade d'immeuble se reflète de part et d'autre de la porte centrale, et beaucoup de logos de marques sont construits autour d'un axe. Comme la symétrie conserve la forme et la taille, le reflet est identique à l'original, seulement retourné.

Un peu d'histoire

L'idée de symétrie est très ancienne : les artisans de l'Égypte et de la Grèce antique l'utilisaient déjà pour décorer temples et poteries. Le mot « symétrie » vient du grec « summetria », qui signifiait « juste proportion ». En 1872, le mathématicien allemand Felix Klein a réuni toutes les transformations, dont la symétrie, dans une même théorie : la géométrie devient l'étude de ce qui ne change pas quand on transforme une figure.

Définition : la symétrie axiale

La symétrie axiale transforme une figure comme dans un miroir, par rapport à une droite appelée l'axe de symétrie. Si l'on plie la feuille le long de cet axe, la figure et son image se superposent exactement. Le mot « axiale » vient d'« axe » : c'est cette droite qui sert de miroir.

Symétrie axiale

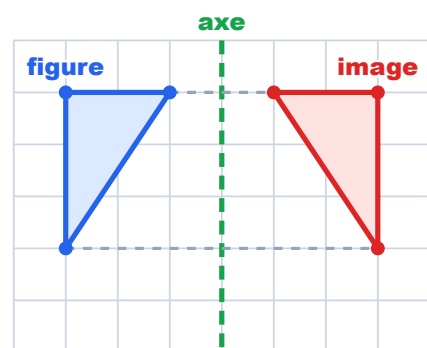


figure bleue : départ — figure rouge : image

La figure et son image se replient l'une sur l'autre le long de l'axe.

Propriétés : la symétrie axiale

L'image d'un point

L'image d'un point A est le point A', placé de l'autre côté de l'axe, à la même distance de l'axe. Si A est déjà sur l'axe, il ne bouge pas : son image est lui-même.

L'axe est la médiatrice

Le segment [AA'] qui relie un point à son image est toujours perpendiculaire à l'axe, et l'axe le coupe en son milieu. Autrement dit, l'axe est la médiatrice de [AA'].

La symétrie conserve les mesures

Une symétrie axiale ne déforme pas la figure : elle conserve les longueurs, les mesures d'angles, les aires, les périmètres et l'alignement des points. Un segment de 7 cm a une image de 7 cm ; un angle de 40° a une image de 40° .

Les axes des figures usuelles

Un rectangle non carré possède 2 axes de symétrie, un carré en possède 4 (les deux médianes et les deux diagonales), un triangle équilatéral en possède 3, un triangle isocèle non équilatéral en possède 1 et un cercle en possède une infinité.

Méthode : la symétrie axiale

1. Plier en pensée

Pour reconnaître une symétrie, on imagine que l'on plie la feuille le long de l'axe. Si la figure et son image se superposent exactement, c'est bien une symétrie axiale.

2. Tracer la perpendiculaire

Pour construire l'image d'un point A, on trace la droite perpendiculaire à l'axe qui passe par A. C'est sur cette droite que se trouvera l'image A'.

3. Reporter la distance

On mesure la distance de A à l'axe, puis on reporte cette même distance de l'autre côté, sur la perpendiculaire. On obtient A'. Pour une figure, on répète ce geste pour chaque sommet.

Selon ce que l'on cherche

Reconnaître une symétrie

Vérifier qu'une figure est bien l'image d'une autre par symétrie axiale : on contrôle que chaque point et son image sont à la même distance de l'axe, de part et d'autre.

Construire l'image

Construire l'image d'un point ou d'une figure : perpendiculaire à l'axe, même distance de l'autre côté. Pour un triangle ABC, on construit A', B', C' puis on relie les points.

Trouver les axes

Chercher les axes de symétrie d'une figure : on teste mentalement les pliages possibles. Rectangle : 2 axes, carré : 4, triangle équilatéral : 3, cercle : une infinité.

Exemples corrigés

Reconnaître une symétrie axiale

Sur un quadrillage, une figure bleue est reflétée de l'autre côté d'une droite verticale, comme dans un miroir.

Quelle transformation relie la figure bleue à son reflet ?

Symétrie axiale

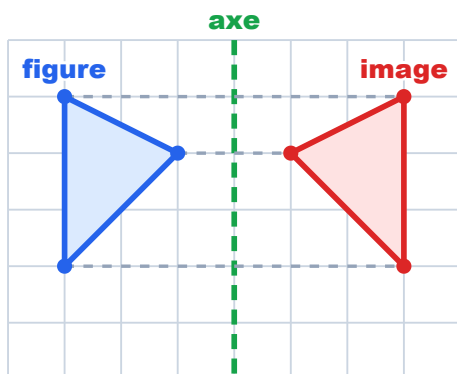


figure bleue : départ — figure rouge : image

On repère l'axe vertical qui sépare les deux figures. Chaque point du reflet est de l'autre côté de l'axe, à la même distance que le point d'origine : l'axe joue le rôle d'un miroir. La transformation utilisée est donc une symétrie axiale (et non une translation, qui ferait glisser la figure sans la retourner).

Construire l'image d'un point

Le point A est à 3 carreaux à gauche d'un axe vertical.

Où placer son image A' par symétrie axiale ?

Symétrie axiale

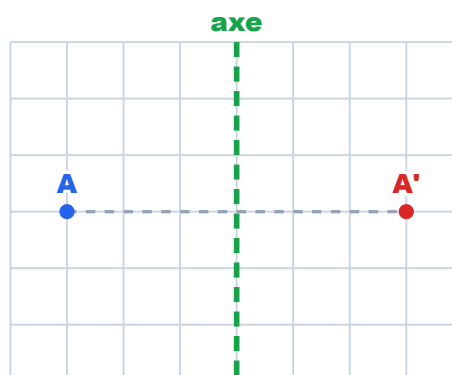


figure bleue : départ — figure rouge : image

On trace la perpendiculaire à l'axe passant par A : c'est une ligne horizontale. On reporte la même distance de l'autre côté de l'axe : A étant à 3 carreaux à gauche, A' se place à 3 carreaux à droite de l'axe, sur cette même ligne. L'axe est alors le milieu du segment [AA'].

Pièges à éviter

Placer l'image du bon côté de l'axe mais pas à la bonne distance : le point et son image doivent être exactement à la même distance de l'axe.

Oublier que le segment qui relie un point à son image est perpendiculaire à l'axe : l'axe doit couper ce segment en son milieu.

Confondre symétrie et translation : une symétrie retourne la figure comme un miroir, une translation la fait juste glisser sans la retourner.

Se fier à l'impression « ça a l'air symétrique » : il faut vérifier plusieurs sommets, pas seulement la forme générale.

À retenir

La symétrie axiale, c'est le pliage le long d'un axe : la figure et son image se superposent exactement.

L'image d'un point est de l'autre côté de l'axe, à la même distance ; l'axe est la médiatrice du segment qui les relie.

Une symétrie axiale conserve tout : les longueurs, les angles, les aires et l'alignement. Elle ne déforme rien.

Exercices corrigés : la symétrie axiale

1. Sur un motif de carrelage, une figure est reflétée de l'autre côté d'un axe vertical, comme dans un miroir. S'agit-il d'une symétrie axiale ou d'une translation ? Explique.

Correction :

Il y a un axe vertical qui joue le rôle de miroir : la figure est retournée de l'autre côté, à la même distance. C'est donc une symétrie axiale. Ce n'est pas une translation, car une translation ferait seulement glisser la figure dans une direction, sans la retourner.

2. Le point A est à 4 carreaux au-dessus d'un axe horizontal. Où se trouve son image A' ? À quelle distance de l'axe se trouve-t-elle ?

Correction :

L'image se place de l'autre côté de l'axe, à la même distance : A' est donc à 4 carreaux au-dessous de l'axe horizontal. La symétrie conserve la distance à l'axe, donc A' est bien à 4 carreaux de l'axe, comme A.

3. Pour construire l'image d'un triangle ABC par symétrie axiale, que faut-il faire ? Puis : combien d'axes de symétrie possède un carré ?

Correction :

On construit l'image de chacun des trois sommets : A', B' et C', chacun de l'autre côté de l'axe et à la même distance que le sommet de départ. On relie ensuite A', B' et C' pour obtenir le triangle image. Un carré possède 4 axes de symétrie : les deux médianes (qui passent par les milieux des côtés opposés) et les deux diagonales.

4. Défi : un segment [AB] mesure 6 cm et un carré a une aire de 16 cm^2 . Que valent la longueur de l'image [A'B'] et l'aire de l'image du carré par symétrie axiale ?

Correction :

La symétrie axiale conserve les longueurs et les aires : elle ne déforme rien. L'image du segment mesure donc 6 cm, et l'image du carré a une aire de 16 cm^2 . Retenir : ce qui est conservé, ce sont les longueurs, les angles, les aires et l'alignement.