

Le théorème de Pythagore — cours de maths 4e

Dans un triangle rectangle, les trois côtés sont liés par une égalité : celui d'en face de l'angle droit, l'hypoténuse, obéit à la somme des carrés des deux autres. Cette égalité sert dans les deux sens — pour calculer une longueur qu'on ne peut pas mesurer, et pour prouver qu'un angle est droit.

CONDITION

Un triangle rectangle (sinon, rien ne s'applique)

LE MOT CLÉ

L'hypoténuse : le côté opposé à l'angle droit

OUTIL

Les carrés et les racines carrées

À quoi ça sert : le théorème de Pythagore

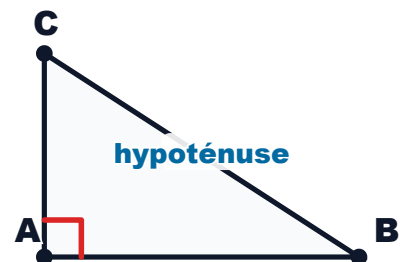
À La Réunion, on s'en sert dès qu'on construit : vérifier qu'un mur est d'aplomb, qu'une dalle est bien rectangulaire, qu'une varangue est d'équerre. Les maçons utilisent depuis toujours le triplet 3-4-5, qui donne un angle droit sans équerre. On s'en sert aussi pour toute longueur qu'on ne peut pas mesurer directement : la hauteur d'un pied de letchi à partir de son ombre, la distance à vol d'oiseau entre deux points d'une carte, la longueur d'une rampe.

Un peu d'histoire : le théorème de Pythagore

Le théorème porte le nom de Pythagore, un savant grec du VI^e siècle avant notre ère — mais il était connu bien avant lui. Une tablette babylonienne vieille de 3800 ans, Plimpton 322, aligne déjà des triplets comme 3-4-5 et 5-12-13. Les arpenteurs égyptiens tendaient une corde à treize nœuds pour retracer les champs après les crues du Nil : douze intervalles, un triangle 3-4-5, et l'angle droit apparaît.

Définition : le théorème de Pythagore

Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit. Le côté opposé à cet angle droit s'appelle l'hypoténuse : c'est toujours le plus long des trois côtés. Le théorème de Pythagore dit que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

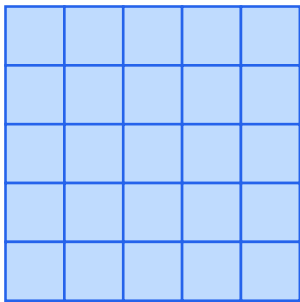


L'angle droit est en A : l'hypoténuse est BC, en face de lui.

Propriétés : le théorème de Pythagore

Un carré, c'est une aire

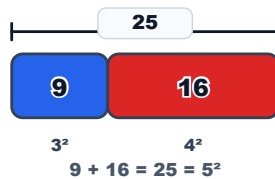
Le carré d'un nombre, c'est l'aire d'un carré qui a ce nombre pour côté : $5^2 = 25$. La racine carrée fait le chemin inverse : elle repart de l'aire pour retrouver le côté.



$$5 \times 5 = 25 \text{ carreaux}$$

L'égalité de Pythagore

Les carrés des deux côtés de l'angle droit se rangent exactement dans le carré de l'hypoténuse : $9 + 16 = 25$.



Retrouver un côté de l'angle droit

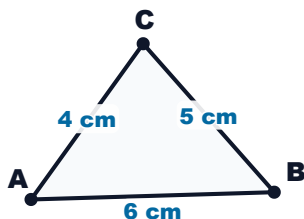
Quand c'est l'hypoténuse qu'on connaît, on retire : le carré cherché est la différence des deux autres carrés.

Données	côté	son carré
	13 cm	169
	?	?
	5 cm	25

$$169 - 25 = 144, \text{ et } 144 = 12^2$$

La réciproque, et ce qu'elle refuse

Ici $4^2 + 5^2 = 41$, alors que $6^2 = 36$. L'égalité est fausse, donc le triangle n'est pas rectangle : la réciproque conclut dans les deux sens.

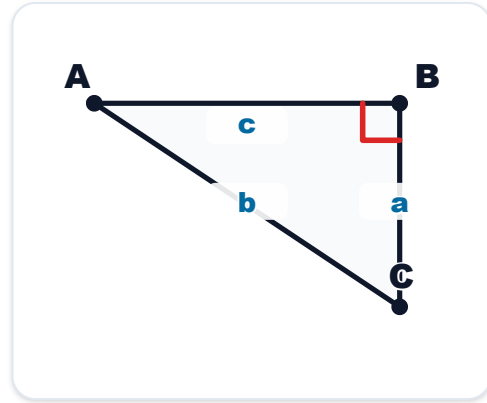


La formule : le théorème de Pythagore

DANS UN TRIANGLE ABC RECTANGLE EN B

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

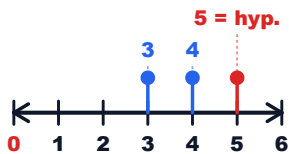
La formule ne suit pas la position de la figure, elle suit l'angle droit : l'hypoténuse est toujours celle qui est en face de lui, ici AC.



Méthode : le théorème de Pythagore

1. Repérer

On cherche d'abord le petit carré de l'angle droit, puis le côté d'en face : c'est l'hypoténuse. Contrôle rapide, elle doit être la plus grande des trois longueurs.



2. Calculer

On monte au carré, on additionne si on cherche l'hypoténuse, on soustrait si on cherche un côté de l'angle droit. Puis on redescend à la longueur avec la racine carrée.

	1	6	9
-		2	5
	1	4	4

et $144 = 12^2$, donc le côté mesure 12 cm

3. Rédiger

Trois lignes, toujours les mêmes. 1) « Dans le triangle ABC rectangle en A... » — on annonce l'angle droit. 2) « ...d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » — on écrit l'égalité avant de calculer. 3) On calcule, puis on conclut par une phrase avec l'unité.

Selon ce que l'on cherche : le théorème de Pythagore

Calculer l'hypoténuse

Les deux côtés de l'angle droit sont connus. On élève chacun au carré, on additionne, et la racine carrée du résultat donne l'hypoténuse.

Calculer un côté de l'angle droit

L'hypoténuse et un côté sont connus. On soustrait le carré du côté connu au carré de l'hypoténuse, puis on prend la racine carrée.

Démontrer qu'un angle est droit

Les trois longueurs sont connues. On calcule séparément le carré du plus grand côté et la somme des carrés des deux autres : si les deux

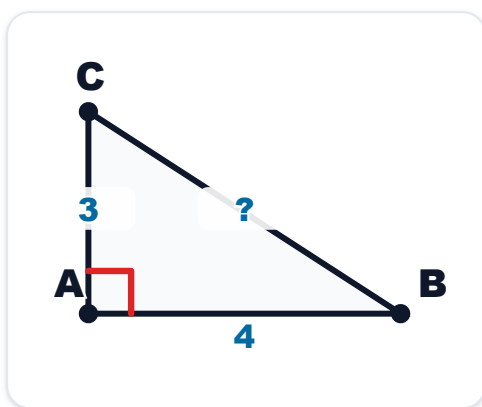
résultats sont égaux, le triangle est rectangle.

Exemples corrigés : le théorème de Pythagore

La diagonale de l'écran

Un écran rectangulaire mesure 3 dm de haut et 4 dm de large. Le triangle ABC est rectangle en A, avec $AB = 4$ dm et $AC = 3$ dm.

Combien mesure sa diagonale BC ?

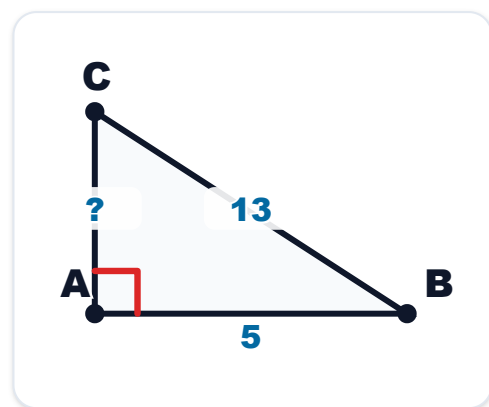


Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Donc $BC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. Or $25 = 5^2$, donc $BC = 5$. La diagonale de l'écran mesure 5 dm.

L'échelle contre le mur

Une échelle de 13 m est posée contre un mur vertical. Son pied est à 5 m du mur. Le triangle ABC est rectangle en A, avec $BC = 13$ m et $AB = 5$ m.

À quelle hauteur l'échelle touche-t-elle le mur ?

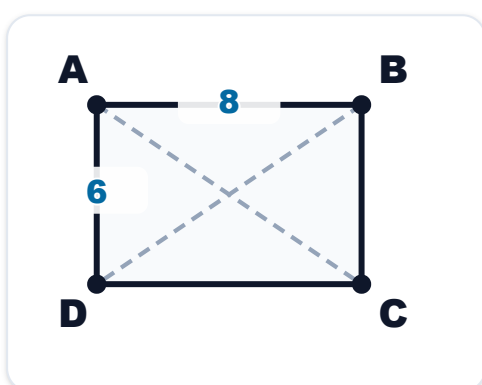


Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Donc $13^2 = 5^2 + AC^2$, c'est-à-dire $169 = 25 + AC^2$. On soustrait : $AC^2 = 169 - 25 = 144$. Or $144 = 12^2$, donc $AC = 12$. L'échelle touche le mur à 12 m de hauteur.

L'étagère est-elle d'équerre ?

On veut vérifier que le coin A d'une étagère est droit. On mesure $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm, et la diagonale $AC = 10$ cm.

Le coin est-il droit ?



la diagonale AC doit mesurer 10

On travaille dans le triangle ABD dont le plus grand côté est la diagonale. D'un côté, $10^2 = 100$. De l'autre, $8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$. Les deux résultats sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A : le coin est bien droit.

Pièges à éviter : le théorème de Pythagore

Additionner alors qu'il faut soustraire : pour un côté de l'angle droit, on retire le carré du côté connu au carré de l'hypoténuse.

Prendre le mauvais côté pour l'hypoténuse : ce n'est pas « celui du bas » ni « le plus penché », c'est celui qui est en face de l'angle droit.

Oublier la racine carrée : le calcul donne le carré de la longueur, pas la longueur. 25 n'est pas la réponse, 5 l'est.

À retenir : le théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit, et c'est toujours le plus long des trois.

La réciproque fait le chemin inverse : si l'égalité est vraie, alors le triangle est rectangle ; si elle est fausse, il ne l'est pas.

Exercices corrigés : le théorème de Pythagore

1. Dans un triangle rectangle, quel côté appelle-t-on l'hypoténuse, et comment le reconnaît-on à coup sûr ?

Correction :

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit, c'est-à-dire celui qui ne touche pas le petit carré. On le reconnaît aussi à sa longueur : c'est toujours le plus long des trois côtés.

2. Un triangle MNP est rectangle en M, avec $MN = 6$ cm et $MP = 8$ cm. Combien mesure NP ?

Correction :

Dans le triangle MNP rectangle en M, d'après le théorème de Pythagore : $NP^2 = MN^2 + MP^2$. Donc $NP^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$. Or $100 = 10^2$, donc $NP = 10$ cm.

3. Un triangle a pour côtés 4 cm, 5 cm et 6 cm. Est-il rectangle ? Justifie.

Correction :

Le plus grand côté mesure 6 cm. D'un côté, $6^2 = 36$. De l'autre, $4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$. Comme 36 et 41 sont différents, l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée : d'après la réciproque, le triangle n'est pas rectangle.

4. Un maçon veut tracer un angle droit sans équerre. Il mesure 3 m sur un mur, 4 m sur l'autre, et ajuste jusqu'à ce que la distance entre les deux extrémités soit exactement 5 m. Pourquoi son coin est-il droit ?

Correction :

Il utilise la réciproque du théorème de Pythagore. Le plus grand côté mesure 5 m : $5^2 = 25$, et $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Les deux résultats sont égaux, donc le triangle est rectangle, et l'angle entre les côtés de 3 m et 4 m est droit.