

Le théorème de Thalès

cours et exercices corrigés de maths 3e

Le théorème est celui de la quatrième, mot pour mot. Ce qui change en troisième, c'est ce qu'on en attend au brevet : reconnaître la configuration même quand elle est retournée en papillon, et rédiger une justification qui tienne — parce que les points sont donnés pour le raisonnement, pas seulement pour le résultat.

PRÉREQUIS

Droites parallèles, proportionnalité, quotients égaux

LES DEUX FORMES

Triangles emboîtés, et papillon

L'IDÉE CLÉ

Deux parallèles coupées par deux sécantes

À quoi ça sert : le théorème de Thalès

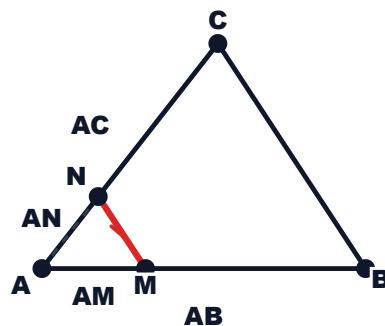
Thalès mesure ce qui est trop grand pour un décimètre. La hauteur d'un arbre par la longueur de son ombre comparée à celle d'un bâton, la largeur d'une ravine sans la traverser, la hauteur d'un mât : dans chaque cas, on fabrique un petit triangle semblable au grand et on lit le rapport. C'est aussi le principe de l'agrandissement d'un plan, du réglage d'un vidéoprojecteur, et de tout ce qui se calcule « à l'échelle ».

Un peu d'histoire : le théorème de Thalès

La légende raconte que Thalès de Milet, vers 600 avant notre ère, aurait mesuré la hauteur de la pyramide de Khéops en comparant son ombre à celle de son bâton, planté verticalement. L'anecdote est probablement enjolivée, mais elle dit bien l'idée : plutôt que d'atteindre le sommet, on compare deux triangles semblables. Le théorème porte son nom en France ; ailleurs, on l'appelle souvent « théorème des proportions ».

Définition : le théorème de Thalès

Deux droites sécantes en un point A sont coupées par deux droites parallèles. Le théorème de Thalès affirme alors que les longueurs découpées sur ces sécantes sont proportionnelles : les trois quotients AM/AB , AN/AC et MN/BC sont égaux. Il faut donc DEUX conditions, et pas une : des points alignés sur deux sécantes issues du même point, et deux droites parallèles.



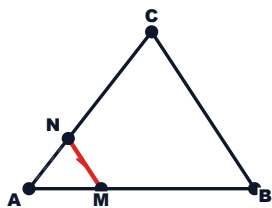
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles : les longueurs découpées sur (AB) et sur (AC) sont proportionnelles.

Propriétés : le théorème de Thalès

Il faut deux sécantes ET deux parallèles

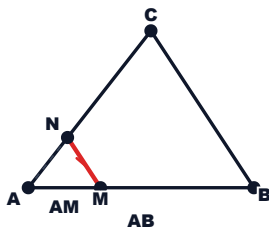
C'est la condition d'entrée, et elle se vérifie AVANT tout calcul. Deux droites qui se coupent en A, deux droites parallèles qui les traversent. S'il manque le parallélisme, le théorème ne s'applique pas — et rien n'autorise à écrire les quotients.



les marques indiquent le parallélisme

La configuration en triangles emboîtés

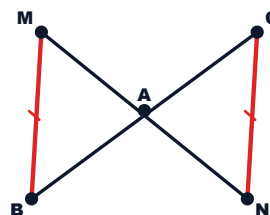
C'est la forme la plus courante : M appartient au segment [AB], N au segment [AC], et la droite (MN) est parallèle à (BC). Le petit triangle AMN est comme une réduction du grand triangle ABC.



le petit triangle est emboîté dans le grand

La configuration en papillon

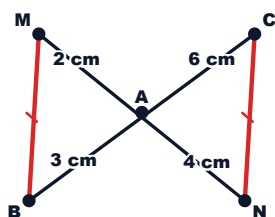
C'est la MÊME situation, retournée : les deux triangles sont de part et d'autre du point A, opposés par le sommet. Un élève qui n'a vu que des triangles emboîtés ne reconnaît plus Thalès du tout — c'est l'erreur de configuration la plus fréquente au brevet.



les deux triangles, de part et d'autre de A

Le papillon donne les mêmes quotients

Et c'est tout l'intérêt de le reconnaître : une fois la configuration identifiée, on écrit exactement les mêmes égalités que dans le cas emboité. Rien à retenir en plus, rien à adapter. Seul le dessin a changé de forme.



$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} : \text{les quotients sont égaux}$$

Le papillon est une homothétie de rapport négatif

Les deux configurations sont en réalité la même transformation. Le centre de cette homothétie est le point où les deux sécantes se croisent : on le note A ici, mais c'est exactement le point que la fiche des transformations appelle O. Dans le cas emboité, le petit triangle est l'image du grand par une homothétie de rapport POSITIF. Dans le papillon, le rapport est NÉGATIF : le signe moins est précisément ce qui fait basculer l'image de l'autre côté du centre. C'est pour cela que les quotients de longueurs restent identiques — seule la position change.

configuration	rapport
triangles emboités	positif
papillon	négatif

le signe décide du côté

Les quotients se lisent dans le même ordre

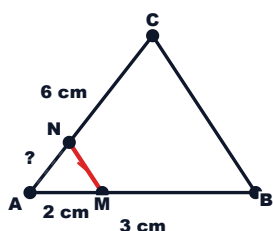
C'est là que les erreurs se logent. Chaque quotient met le PETIT au numérateur et le GRAND au dénominateur, et l'on respecte le même ordre dans les trois : AM/AB, puis AN/AC, puis MN/BC. Mélanger l'ordre, c'est écrire une égalité fautive tout en croyant appliquer le théorème.

sur (AB)	sur (AC)	le parallélogramme
AM / AB	AN / AC	MN / BC

le petit au-dessus, toujours dans le même ordre

Trois longueurs connues suffisent

Pour calculer la quatrième, on écrit l'égalité des deux quotients qui contiennent les longueurs utiles, et on résout par le produit en croix. On n'écrit jamais les trois quotients quand deux suffisent.



trois longueurs connues, une inconnue

La réciproque démontre le parallélisme

On l'emploie dans l'autre sens : si les points sont alignés dans le MÊME ORDRE sur les deux sécantes et si les quotients sont égaux, alors les droites sont parallèles. C'est le seul outil du collège qui permet de conclure « ces droites sont parallèles » à partir de longueurs.

on connaît	on en déduit
les parallèles	les quotients sont égaux
les quotients égaux	les droites sont parallèles

le théorème, puis sa réciproque

L'ordre des points conditionne la réciproque

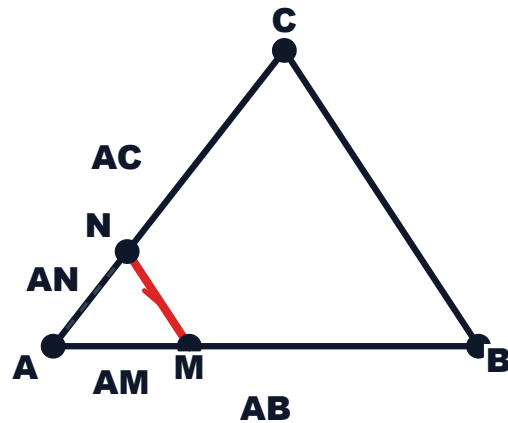
Attention : l'égalité des quotients ne suffit pas. Il faut AUSSI que les points soient rangés dans le même ordre sur les deux droites — A, M, B d'un côté et A, N, C de l'autre. Si l'ordre diffère, les quotients peuvent être égaux sans que les droites soient parallèles.

La formule : le théorème de Thalès

LE THÉORÈME DE THALÈS

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Valable dans les DEUX configurations : triangles emboîtés et papillon. Le petit au numérateur, et le même ordre dans les trois quotients.



trois quotients, une seule égalité

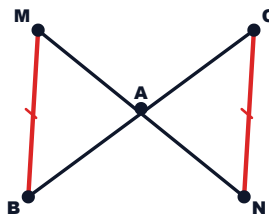
Méthode : le théorème de Thalès

1. Chercher les parallèles d'abord

Avant de nommer quoi que ce soit, on repère les marques de parallélisme ou la phrase de l'énoncé qui l'affirme. Sans parallèles, pas de Thalès.

2. Identifier la configuration

Les deux triangles sont-ils emboîtés, ou de part et d'autre du point commun ? La réponse ne change RIEN aux calculs, mais elle évite de croire que le théorème ne s'applique pas.



retourné, c'est la même configuration

3. Écrire les quotients dans l'ordre

On écrit les trois quotients avec toujours le petit au numérateur : $AM/AB = AN/AC = MN/BC$. On garde le même ordre partout — c'est ce qui rend l'égalité vraie.

4. Calculer par produit en croix

On ne garde que les deux quotients où figure l'inconnue et les longueurs connues, puis on résout : de $AM/AB = AN/AC$ on tire $AN = AC \times AM / AB$.

5. Rédiger la justification

Au brevet, les points vont à la rédaction autant qu'au résultat.
Trois phrases suffisent : les points sont alignés, les droites sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès on peut écrire l'égalité — puis le calcul.

Selon ce que l'on cherche : le théorème de Thalès

On cherche une longueur

Les parallèles sont données : on applique le théorème, on écrit deux quotients et on résout par produit en croix.

On cherche à prouver un parallélisme

On vérifie l'ordre des points, on calcule les deux quotients, et s'ils sont égaux on conclut par la réciproque.

La figure ne ressemble à rien de connu

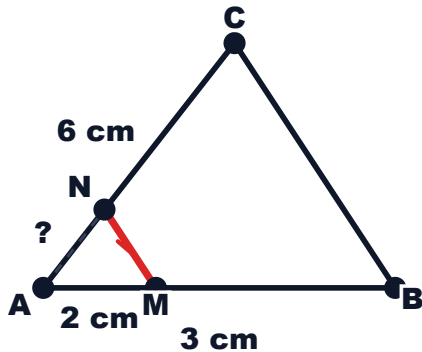
On la retourne mentalement : le papillon est la même configuration vue de l'autre côté du point commun.

Exemples corrigés : le théorème de Thalès

Calculer une longueur

Dans le triangle ABC, M appartient à [AB] et N à [AC], avec (MN) parallèle à (BC). On a AM = 2 cm, AB = 3 cm et AC = 6 cm.

Combien mesure AN ?



$$\frac{2}{3} = \frac{AN}{6}$$

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès : $AM/AB = AN/AC$, soit $2/3 = AN/6$. Par produit en croix, $AN = 6 \times 2 / 3 = 4$ cm.

Prouver que deux droites sont parallèles

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, et A, N, C aussi. On mesure AM = 2, AB = 3, AN = 4 et AC = 6.

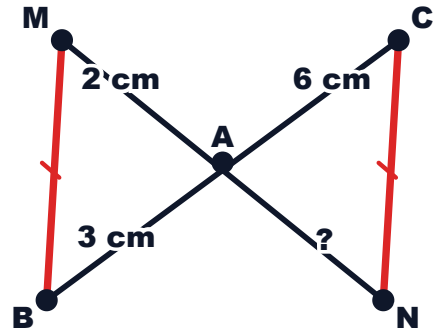
Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

On calcule les deux quotients : $AM/AB = 2/3$ et $AN/AC = 4/6 = 2/3$. Ils sont égaux, et les points sont alignés dans le même ordre sur les deux droites. D'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) et (BC) sont parallèles.

Le même calcul, en papillon

Même énoncé, mais M et N sont de l'autre côté de A : les deux triangles sont opposés par le sommet. On a toujours AM = 2 cm, AB = 3 cm et AC = 6 cm.

Combien mesure AN ?



même théorème, autre forme

La configuration est un papillon, mais le théorème est le même : $AM/AB = AN/AC$, soit $2/3 = AN/6$, donc $AN = 4$ cm. Le dessin a changé de forme, pas le calcul.

Rédiger comme au brevet

Une configuration de Thalès, avec (MN) parallèle à (BC).

Comment rédiger le calcul de MN ?

Trois phrases. « Les points A, M, B sont alignés et les points A, N, C sont alignés. Les droites (MN) et (BC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, $AM/AB = AN/AC = MN/BC$. » Puis on remplace par les valeurs et on calcule. Les points de barème vont à ces trois phrases autant qu'au résultat.

Pièges à éviter : le théorème de Thalès

Appliquer Thalès sans parallèles : c'est la condition d'entrée, elle se vérifie avant tout calcul.

Ne pas reconnaître le papillon et croire que le théorème ne s'applique pas : c'est la même configuration, retournée.

Mélanger l'ordre des quotients : le petit est toujours au numérateur, et l'ordre est le même dans les trois.

Oublier de vérifier l'ordre des points avant d'employer la réciproque : l'égalité des quotients ne suffit pas.

Confondre le théorème et sa réciproque : l'un part des parallèles, l'autre y arrive.

Donner le résultat sans la justification : au brevet, les trois phrases valent autant que le nombre.

À retenir : le théorème de Thalès

Thalès demande deux sécantes issues d'un même point ET deux droites parallèles.

Deux configurations : triangles emboîtés, et papillon. Le théorème est identique.

$AM/AB = AN/AC = MN/BC$: le petit au numérateur, le même ordre dans les trois.

Trois longueurs connues suffisent pour trouver la quatrième, par produit en croix.

La réciproque prouve un parallélisme — à condition que les points soient dans le même ordre.

Au brevet, la rédaction compte : alignement, parallélisme, puis l'égalité.

Exercices corrigés : le théorème de Thalès

1. Une configuration de Thalès met en jeu combien de droites parallèles, et combien de sécantes ?

Correction :

Deux droites parallèles, coupées par deux droites sécantes en un même point. Les deux conditions sont nécessaires.

2. Dans une configuration en papillon, où sont situés les deux triangles ?

Correction :

De part et d'autre du point commun aux deux sécantes : ils sont opposés par le sommet. Le théorème s'y applique exactement de la même façon.

3. Compléter : $AM/AB = AN/... = .../BC$

Correction :

$$AM/AB = AN/AC = MN/BC.$$

4. Avec $AM = 2$ cm, $AB = 3$ cm et $AC = 6$ cm, combien mesure AN ?

Correction :

$$AM/AB = AN/AC \text{ donne } 2/3 = AN/6, \text{ donc } AN = 6 \times 2 / 3 = 4 \text{ cm.}$$

5. On trouve $AM/AB = 2/3$ et $AN/AC = 2/3$. Peut-on conclure que (MN) et (BC) sont parallèles ?

Correction :

Oui, à condition que les points soient alignés dans le même ordre sur les deux droites. C'est la réciproque du théorème de Thalès.

6. Quelles phrases faut-il écrire avant de poser l'égalité des quotients ?

Correction :

Que les points sont alignés sur chacune des deux sécantes, et que les deux droites sont parallèles.
Ces deux phrases justifient l'emploi du théorème.