

Le théorème de Thalès — cours de maths 4e

Quand une droite parallèle à un côté coupe un triangle, elle fabrique un petit triangle qui a exactement la même forme que le grand — juste réduit. Le théorème de Thalès met cette réduction en chiffres : trois rapports de longueurs, tous égaux.

CONDITION

Deux droites parallèles (sans elles, rien ne s'applique)

LES DEUX FORMES

Triangles emboîtés, et papillon

OUTIL

L'égalité de trois rapports, et le produit en croix

À quoi ça sert : le théorème de Thalès

Thalès sert dès qu'une longueur est hors de portée. À La Réunion, c'est la hauteur d'un pied de letchi ou d'un filao mesurée par son ombre : on plante un bâton, on compare les deux ombres, et le rapport donne la hauteur de l'arbre. C'est aussi la façon dont on lit un plan à l'échelle, dont on agrandit un patron de couture, et dont un appareil photo forme son image — l'objet et sa photo sont deux triangles emboîtés de part et d'autre de l'objectif.

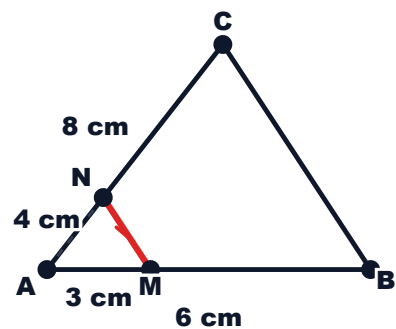
Un peu d'histoire : le théorème de Thalès

La légende raconte que Thalès de Milet, six siècles avant notre ère, aurait mesuré la hauteur de la pyramide de Khéops depuis son ombre : il aurait attendu l'instant où son propre corps projetait une ombre de sa taille, et mesuré au même moment l'ombre de la pyramide. Le théorème porte son nom en France seulement — ailleurs, on l'appelle le théorème des proportions ou le théorème de l'interception.

Définition : le théorème de Thalès

Dans un triangle ABC, si M est un point de [AB], N un point de [AC], et si la droite (MN) est parallèle à (BC), alors les longueurs des trois côtés du petit triangle sont proportionnelles à celles du grand.

Autrement dit, les trois rapports AM/AB , AN/AC et MN/BC sont égaux.

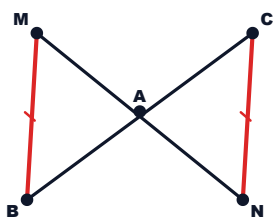


(MN) est parallèle à (BC) : le petit triangle AMN est une réduction du grand ABC.

Propriétés : le théorème de Thalès

Les deux configurations

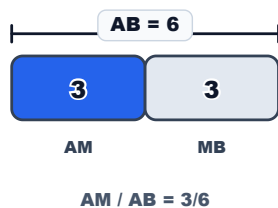
Thalès ne sert pas que dans les triangles emboîtés. Quand les deux triangles sont de part et d'autre du point commun, on parle de configuration en papillon : le théorème est le même.



le papillon : même théorème, autre forme

Un rapport compare une partie au tout

AM n'est pas une longueur quelconque : c'est une fraction de AB, et MB est ce qui reste. Le rapport AM/AB mesure cette fraction.



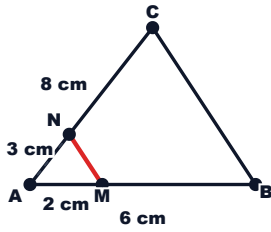
Une quatrième proportionnelle

Le petit triangle et le grand forment un tableau de proportionnalité : le même coefficient relie chaque longueur à celle qui lui correspond. Calculer, c'est remplir la case vide.

	1er côté	2e côté
petit AMN	4	5
grand ABC	12	?

La réciproque, et ce qu'elle refuse

Ici $AM/AB = 2/6$ et $AN/AC = 3/8$. Les deux rapports sont différents, donc (MN) n'est pas parallèle à (BC) : aucune marque de parallélisme sur la figure.

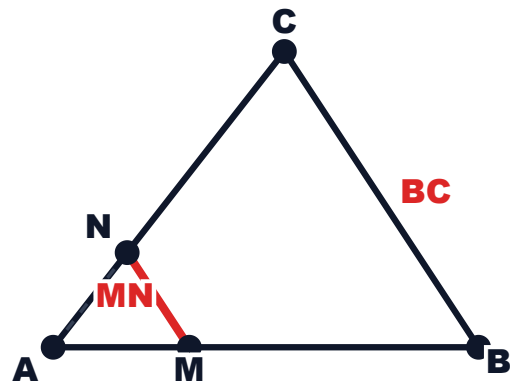


La formule : le théorème de Thalès

DANS UN TRIANGLE ABC, AVEC M SUR [AB], N SUR [AC] ET $(MN) \parallel (BC)$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

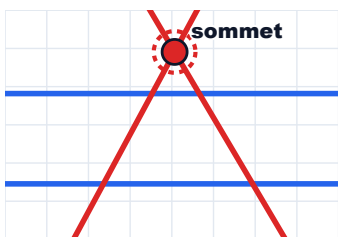
Trois rapports, toujours écrits dans le même ordre : la longueur du petit triangle au-dessus, celle qui lui correspond dans le grand au-dessous.



Méthode : le théorème de Thalès

1. Repérer

On cherche d'abord les deux droites parallèles et leurs marques, puis le point où se croisent les deux sécantes. Sans parallèles, Thalès ne s'applique pas.



deux parallèles, deux sécantes, un point commun

2. Calculer

On écrit l'égalité des rapports, on ne garde que les deux fractions utiles, puis on fait le produit en croix : on multiplie d'abord, on divise ensuite.

$$\begin{array}{r|l} & 5 \\ \times & 12 \\ \hline 6 & 0 \end{array}$$

3. Rédiger

Trois lignes. 1) « Dans le triangle ABC, M appartient à [AB], N appartient à [AC] et (MN) est parallèle à (BC) » — on annonce la configuration ET le parallélisme. 2) « ...d'après le théorème de Thalès, $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ ». 3) On remplace par les nombres, on calcule, on conclut avec l'unité.

$$\text{puis } 60 \div 4 = 15$$

Selon ce que l'on cherche : le théorème de Thalès

Calculer une longueur

Trois longueurs sont connues, la quatrième manque. On écrit les deux rapports qui les contiennent et on fait le produit en croix.

Retrouver une longueur du grand triangle

Le même théorème sert dans les deux sens : on peut chercher une longueur du petit triangle comme une longueur du grand, l'égalité des rapports ne change pas.

Démontrer que deux droites sont parallèles

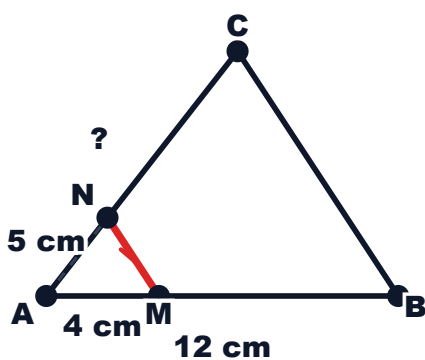
Les quatre longueurs sont connues. On calcule séparément les deux rapports : s'ils sont égaux et si les points sont alignés dans le même ordre, les droites sont parallèles.

Exemples corrigés : le théorème de Thalès

La longueur qui manque

Dans le triangle ABC, M appartient à [AB], N appartient à [AC] et (MN) est parallèle à (BC). On sait que $AM = 4$ cm, $AB = 12$ cm et $AN = 5$ cm.

Combien mesure AC ?

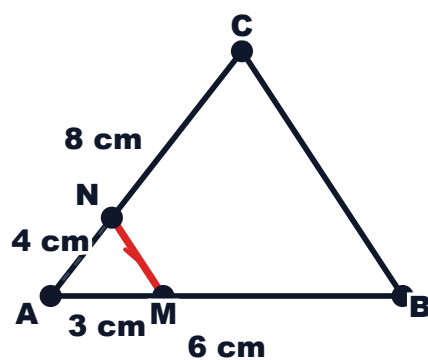


Dans le triangle ABC, M appartient à [AB], N appartient à [AC] et (MN) est parallèle à (BC).
D'après le théorème de Thalès : $AM/AB = AN/AC$.
Donc $4/12 = 5/AC$. Par le produit en croix : $4 \times AC = 5$

Les droites sont-elles parallèles ?

Dans le triangle ABC, M est sur [AB] et N est sur [AC], dans le même ordre depuis A. On mesure $AM = 3$ cm, $AB = 6$ cm, $AN = 4$ cm et $AC = 8$ cm.

La droite (MN) est-elle parallèle à (BC) ?



On calcule les deux rapports séparément. D'un côté, $AM/AB = 3/6 = 0,5$. De l'autre, $AN/AC = 4/8 = 0,5$. Les deux rapports sont égaux, et les points A, M, B d'une part, A, N, C d'autre part, sont alignés dans le même

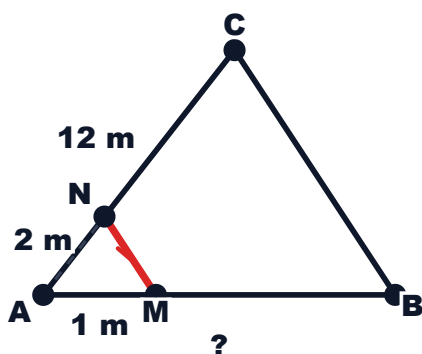
$\times 12 = 60$, donc $AC = 60 \div 4 = 15$. Le côté AC mesure 15 cm.

ordre. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) est parallèle à (BC).

La hauteur du letchi

Un bâton de 1 m planté droit projette une ombre de 2 m. Au même moment, l'ombre d'un pied de letchi mesure 12 m. Le soleil donne deux triangles emboîtés de même forme.

Quelle est la hauteur de l'arbre ?



Les rayons du soleil sont parallèles, donc les deux triangles sont en configuration de Thalès :
hauteur/ombre est le même rapport pour le bâton et pour l'arbre. On écrit $1/2 = h/12$. Par le produit en croix : $2 \times h = 1 \times 12 = 12$, donc $h = 6$. Le pied de letchi mesure 6 m de haut.

Pièges à éviter : le théorème de Thalès

Appliquer Thalès sans parallèles : c'est la condition du théorème, et sans elle l'égalité des rapports est fausse.

Mélanger les deux triangles dans un rapport : chaque fraction compare une longueur du petit à la longueur qui lui correspond dans le grand, jamais deux longueurs du même triangle.

Écrire le résultat avant l'égalité des rapports : le calcul seul ne vaut pas justification, il faut la phrase qui annonce la configuration.

À retenir : le théorème de Thalès

Thalès s'applique dans deux configurations : les triangles emboîtés et le papillon. Dans les deux, il faut deux droites parallèles.

Les rapports se lisent toujours dans le même ordre : $AM/AB = AN/AC = MN/BC$ — petit sur grand, trois fois de suite.

La réciproque fait le chemin inverse : si deux rapports sont égaux et les points bien placés, alors les droites sont parallèles.

Exercices corrigés : le théorème de Thalès

1. Quelle condition doit absolument être vérifiée avant d'écrire une égalité de Thalès ?

Correction :

Il faut deux droites parallèles. Sans parallélisme, les rapports ne sont pas égaux et le théorème ne s'applique pas — c'est la première chose à écrire dans la rédaction.

2. Dans un triangle ABC avec $(MN) \parallel (BC)$, on a $AM = 3$ cm, $AB = 6$ cm et $AN = 4$ cm. Combien mesure AC ?

Correction :

D'après le théorème de Thalès, $AM/AB = AN/AC$, donc $3/6 = 4/AC$. Par le produit en croix : $3 \times AC = 4 \times 6 = 24$, donc $AC = 24 \div 3 = 8$. Le côté AC mesure 8 cm.

3. On mesure $AM = 2$ cm, $AB = 6$ cm, $AN = 3$ cm et $AC = 8$ cm. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Correction :

On compare les deux rapports. $AM/AB = 2/6$, soit environ 0,33. $AN/AC = 3/8$, soit 0,375. Les deux rapports sont différents, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (MN) n'est pas parallèle à (BC) .

4. Pourquoi peut-on mesurer la hauteur d'un arbre avec son ombre et un simple bâton ?

Correction :

Parce que les rayons du soleil arrivent parallèles : le bâton et son ombre, l'arbre et la sienne forment deux triangles en configuration de Thalès. Le rapport hauteur/ombre est donc le même pour les deux, et une seule multiplication suffit pour trouver la hauteur de l'arbre.