

Les transformations — cours de maths 4e

Retourner, faire pivoter, glisser : quatre façons de déplacer une figure sans jamais la déformer. Ce qui change, c'est la place ; ce qui ne change jamais, ce sont les longueurs, les angles et l'aire.

LES QUATRE

Symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation

CE QUI SE CONSERVE

Longueurs, angles et aires — toujours

L'EXCEPTION

Seule la symétrie axiale retourne la figure

À quoi ça sert : les transformations

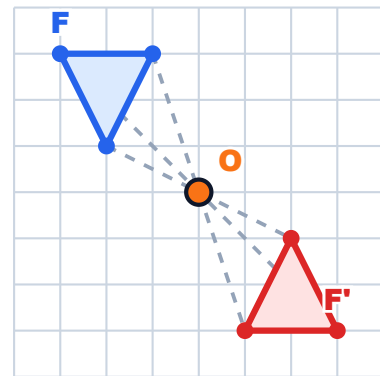
Les transformations sont partout dès qu'un motif se répète. À La Réunion, c'est le carrelage d'une varangue, les losanges d'une case créole, les frises d'un tissu, la vannerie en vacoa : un motif de base, puis des translations pour le répéter et des symétries pour le retourner. C'est aussi ce que fait un logiciel de dessin quand on copie-colle en miroir, et ce que font les usines quand elles découpent un patron symétrique pour économiser du tissu.

Un peu d'histoire : les transformations

Les artisans de l'Alhambra de Grenade, au XIV^e siècle, ont couvert les murs de pavages géométriques qui utilisent les dix-sept façons possibles de répéter un motif dans le plan — bien avant que les mathématiciens ne démontrent, en 1891, qu'il n'en existe que dix-sept. L'artiste néerlandais Escher est allé les étudier sur place en 1936 : c'est de là que viennent ses lézards et ses oiseaux emboîtés.

Définition : les transformations

Une transformation déplace tous les points d'une figure selon une même règle, et fabrique une figure image. La figure de départ et son image ont exactement la même forme et la même taille : on dit qu'elles sont superposables. Ce qui distingue les quatre transformations, c'est la règle de déplacement — et ce qu'il faut connaître pour l'appliquer.



bleu : départ · rouge : image

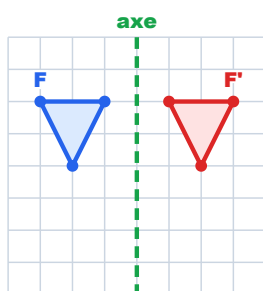
Chaque point et son image sont à égale distance du centre O, de part et d'autre.

Propriétés : les transformations

La symétrie axiale : un miroir

L'axe se comporte comme un miroir : il est la médiatrice du segment qui relie chaque point à son image.

C'est la seule des quatre qui **RETOURNE** la figure.

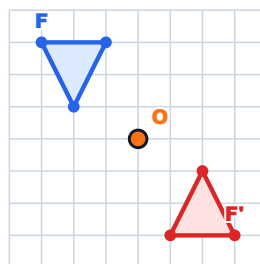


bleu : départ · rouge : image

La symétrie centrale : un demi-tour

Le centre est le milieu du segment qui relie chaque point à son image.

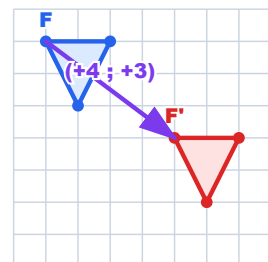
La figure fait un demi-tour complet : elle n'est pas retournée, elle est renversée.



bleu : départ · rouge : image

La translation : un glissement

Tous les points glissent de la même façon : même direction, même sens, même longueur. La flèche dit les trois à la fois.



bleu : départ · rouge : image

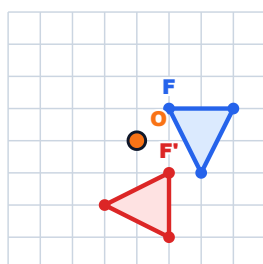
La rotation : un pivot

La figure pivote autour d'un centre, d'un angle donné et dans un sens donné. Il faut les trois : sans l'angle

Ce qui ne change jamais

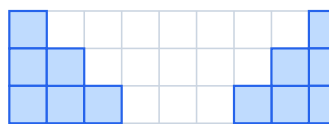
Les quatre transformations conservent les longueurs, les angles et les aires. La figure image

ou sans le sens, l'image n'est pas définie.



bleu : départ · rouge : image

occupe exactement le même nombre de carreaux que la figure de départ.



6 carreaux avant, 6 carreaux après

Méthode : les transformations

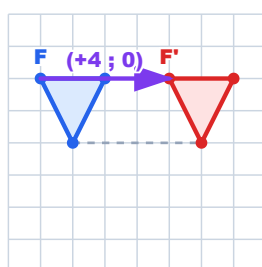
1. Reconnaître

On ne devine pas la transformation en regardant la figure : on regarde ce que l'énoncé DONNE. Un axe, un centre seul, une flèche, ou un centre avec un angle — chaque donnée désigne une seule transformation.

Données	Ce qui est donné	transformation
	un axe	symétrie axiale
	un centre seul	rotation
	une flèche	translation
	un centre + un angle	rotation

2. Construire

On ne construit jamais la figure entière d'un coup : on construit l'image de chaque sommet, un par un, puis on relie. Les traits pointillés du dessin montrent ce report point par point.



bleu : départ · rouge : image

3. Vérifier

Trois contrôles, dans cet ordre. Les longueurs sont-elles conservées ? La figure a-t-elle la même aire ? Et si c'est une symétrie axiale, est-elle bien retournée — sinon, c'est qu'on a fait un demi-tour.

Selon ce que l'on cherche : les transformations

Reconnaître une transformation

On identifie ce qui est donné — axe, centre, flèche, angle — puis on vérifie sur un point : son image est-elle bien à la place attendue ?

Construire une image

On construit sommet par sommet, en appliquant la même règle à chacun, puis on relie les images dans le même ordre que les points de départ.

Démontrer avec les propriétés

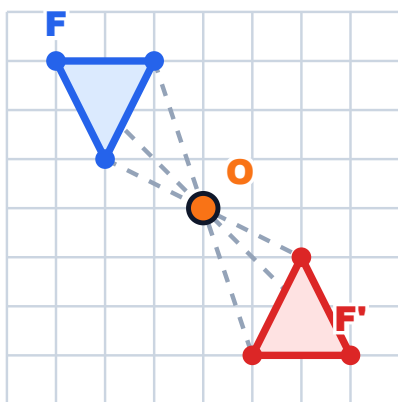
Comme les longueurs et les angles sont conservés, on peut affirmer qu'une longueur de l'image est égale à celle de départ — sans la mesurer.

Exemples corrigés : les transformations

Miroir ou demi-tour ?

Une figure et son image se trouvent de part et d'autre d'un point O, et O est le milieu de chaque segment qui relie un point à son image.

De quelle transformation s'agit-il ?



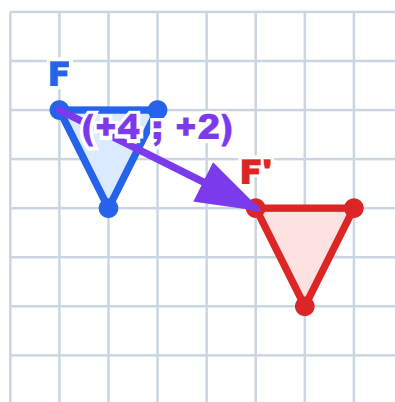
bleu : départ • rouge : image

C'est une symétrie centrale de centre O. La donnée décisive est « O est le milieu » : dans une symétrie axiale, c'est un AXE qui est médiatrice, pas un point qui est milieu. Contrôle visuel : la figure n'est pas retournée comme dans un miroir, elle est renversée.

Le point qui glisse

Le point A a pour coordonnées (1 ; 2). On lui applique une translation de 4 carreaux vers la droite et 2 carreaux vers le bas.

Quelles sont les coordonnées de son image A' ?



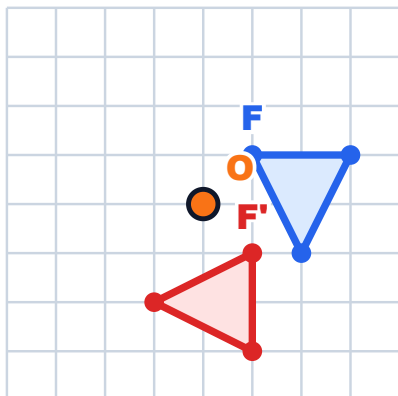
bleu : départ • rouge : image

On ajoute le déplacement à chaque coordonnée. L'abscisse passe de 1 à $1 + 4 = 5$. L'ordonnée, sur un quadrillage compté vers le bas, passe de 2 à $2 + 2 = 4$. Donc A' a pour coordonnées (5 ; 4). Contrôle : tous les autres points ont glissé exactement pareil.

Le quart de tour

Un triangle pivote autour du point O d'un quart de tour, soit 90° , dans le sens des aiguilles d'une montre.

Que peut-on dire de ses côtés après la rotation ?



bleu : départ • rouge : image

Les côtés ont exactement les mêmes longueurs qu'avant, et les angles du triangle sont inchangés : une rotation conserve tout. Seules les DIRECTIONS ont changé — chaque côté a pivoté de 90° . Un côté horizontal est devenu vertical.

Pièges à éviter : les transformations

Confondre symétrie centrale et rotation : la symétrie centrale EST une rotation, mais toujours d'un demi-tour, c'est-à-dire de 180° .

Croire qu'une symétrie axiale et une symétrie centrale donnent la même image : le miroir retourne la figure, le demi-tour la fait pivoter. Ce n'est pas la même chose.

Oublier que l'axe est la médiatrice : il ne suffit pas qu'il passe entre le point et son image, il doit être perpendiculaire et à égale distance des deux.

À retenir : les transformations

Quatre transformations : symétrie axiale (un axe), symétrie centrale (un centre), translation (une flèche), rotation (un centre et un angle).

Toutes conservent les longueurs, les angles et les aires : la figure image a exactement la même forme et la même taille.

Seule la symétrie axiale retourne la figure, comme un miroir. Les trois autres la déplacent sans la retourner.

Exercices corrigés : les transformations

1. Quelle est la seule des quatre transformations qui retourne la figure, comme un miroir ?

Correction :

La symétrie axiale. Les trois autres — symétrie centrale, translation, rotation — déplacent la figure sans jamais la retourner. C'est le contrôle visuel le plus rapide quand on hésite entre deux transformations.

2. Le point B(3 ; 5) subit une translation de 2 carreaux vers la gauche et 1 vers le haut. Quelles sont les coordonnées de B' ?

Correction :

Vers la gauche, on retire à l'abscisse : $3 - 2 = 1$. Vers le haut, on retire à l'ordonnée comptée vers le bas : $5 - 1 = 4$. Donc B' a pour coordonnées (1 ; 4).

3. Une figure a une aire de 12 cm². Quelle est l'aire de son image par une rotation de 60° ?

Correction :

12 cm² également. Toutes les transformations conservent les aires : la figure image est superposable à la figure de départ, donc elle occupe exactement la même surface. L'angle de rotation n'y change rien.

4. Pourquoi peut-on dire que la symétrie centrale est un cas particulier de rotation ?

Correction :

Parce qu'une symétrie centrale de centre O fait faire à la figure un demi-tour autour de O, c'est-à-dire une rotation de 180°. C'est la seule rotation pour laquelle le sens n'a pas d'importance : 180° dans un sens ou dans l'autre donnent la même image.