

Transformations et homothétie

cours et exercices corrigés de maths 3e

Depuis le CE2, toutes les transformations rencontrées déplaçaient la figure sans jamais la changer de taille : le miroir, le demi-tour, le glissement, la rotation. L'homothétie est la première qui agrandit ou qui réduit — et c'est aussi la seule où l'aire ne suit pas les longueurs.

PRÉREQUIS

Symétries, translation, rotation ; proportionnalité

L'IDÉE CLÉ

O, A et A' alignés, et toujours le même rapport

OUTIL

Règle, compas, quadrillage

À quoi ça sert : Transformations et homothétie

L'homothétie, c'est le zoom. Agrandir une photo sur un écran, imprimer un plan à l'échelle, projeter un cours au tableau : à chaque fois, un point fixe et un rapport. C'est aussi la raison pour laquelle une part de pizza deux fois plus longue ne contient pas deux fois plus de garniture, mais quatre fois plus — l'aire suit le carré du rapport. Le même calcul décide du prix d'une bâche, du volume d'une cuve à eau agrandie, ou de ce que coûte vraiment un logo imprimé deux fois plus grand.

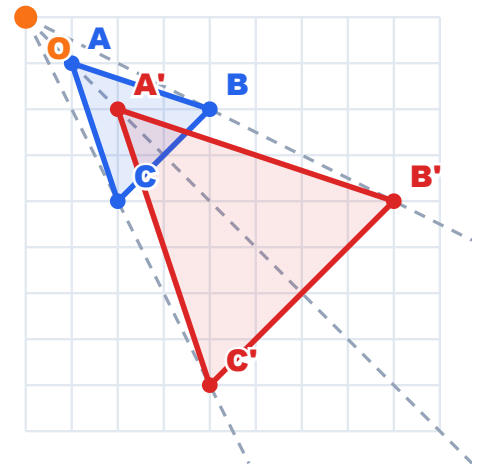
Un peu d'histoire : Transformations et homothétie

Le mot vient du grec « homos » (semblable) et « thesis » (position) : des figures semblablement placées. L'idée est bien plus vieille que le mot — Thalès l'utilisait déjà pour mesurer la hauteur d'une pyramide par son ombre, six siècles avant notre ère. Elle est formalisée au XVIIe siècle par Girard Desargues, un architecte lyonnais dont les travaux sur la perspective sont d'abord passés inaperçus, avant de fonder toute une branche de la géométrie.

Définition : Transformations et homothétie

Une homothétie agrandit ou réduit une figure à partir d'un point fixe appelé le centre, noté O .
Chaque point A de la figure a une image A' située sur la droite (OA) , et toutes les longueurs partant de O sont multipliées par un même nombre k , appelé le rapport. Si k est plus grand que 1 la figure grandit, s'il est compris entre 0 et 1 elle rétrécit. La figure image a exactement la même forme que la figure de départ : seuls les angles sont conservés, pas les longueurs.

Homothétie — $k = 2$



Les trois droites partent de O : A' est sur (OA) , deux fois plus loin

Le triangle rouge est l'image du bleu par l'homothétie de centre O et de rapport 2.
Chaque sommet est resté sur sa droite.

Propriétés : Transformations et homothétie

Quatre transformations ne changent pas les longueurs

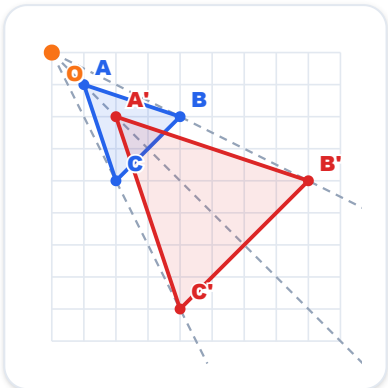
La symétrie axiale (le miroir), la symétrie centrale (le demi-tour), la translation (le glissement) et la rotation (le tour autour d'un point) déplacent la figure sans la déformer. Longueurs, angles et aires sont conservés : la figure image est superposable à la figure de départ.

transformation	
symétrie axiale	u
symétrie centrale	u
translation	gli
rotation	l d'

les quatre conservent les longueurs

L'homothétie, elle, change la taille

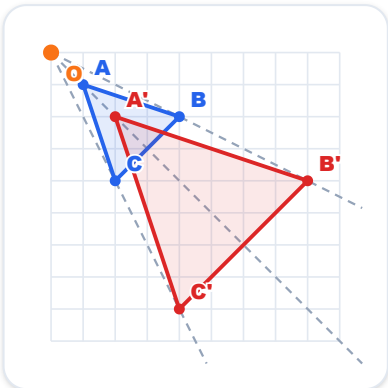
C'est la nouveauté de la troisième, et la seule transformation du collège qui ne conserve pas les longueurs. La figure garde sa forme — un carré reste un carré, un angle droit reste droit — mais elle change de taille. On dit que la figure image est un AGRANDISSEMENT ou une RÉDUCTION de la figure de départ.



même forme, taille doublée

O, A et A' sont toujours alignés

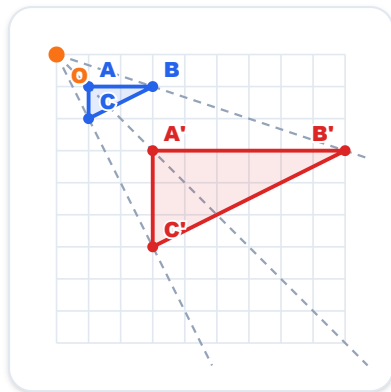
C'est ce qui permet de RECONNAITRE une homothétie sur une figure : on trace les droites qui relient chaque point à son image, et elles se coupent toutes en un même point. Ce point est le centre O. Si les droites ne se croisent pas au même endroit, ce n'est pas une homothétie.



les trois droites se coupent en O

Un rapport plus grand que 1 agrandit

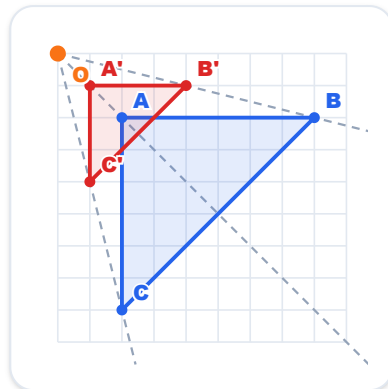
Si k est plus grand que 1, la figure image est plus grande que la figure de départ. Avec $k = 3$, une longueur de 7 cm devient 21 cm : toutes les longueurs sont multipliées par 3.



$k = 3$: la figure triple

Un rapport entre 0 et 1 réduit

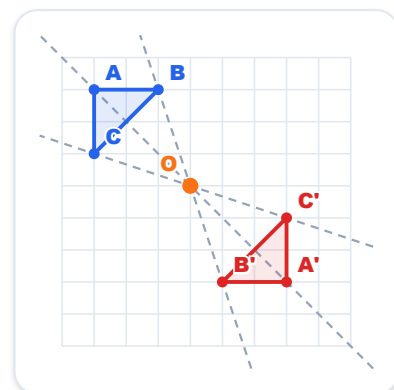
Si k est compris entre 0 et 1, la figure image est plus petite. Avec $k = 1/2$, un segment de 8 cm devient 4 cm. Attention : le rapport reste un multiplicateur, même quand il réduit — on multiplie par $1/2$, on ne soustrait rien.



$k = \frac{1}{2}$: la figure est réduite de moitié

Un rapport négatif bascule la figure

Quand le rapport est négatif, l'image passe DE L'AUTRE CÔTÉ du centre : elle est retournée, et le centre se retrouve entre la figure et son image. Les longueurs, elles, sont multipliées par la valeur du rapport sans son signe. C'est cette configuration que l'on rencontre en géométrie sous le nom de PAPILLON, dans le théorème de Thalès : les deux triangles sont opposés par le sommet, et le sommet commun est justement le centre de l'homothétie.



$k = -1$: l'image bascule de l'autre côté de O

Le rapport se lit sur deux longueurs

Pour trouver k , on divise une longueur de l'image par la longueur correspondante du départ. Si $OA = 4 \text{ cm}$ et $OA' = 12 \text{ cm}$, alors $k = 12 : 4 = 3$. Si $OA = 10 \text{ cm}$ et $OA' = 5 \text{ cm}$, alors $k = 5 : 10 = 1/2$. Le rapport est un QUOTIENT, jamais une différence.

OA	OA'	k
4 cm	12 cm	3
10 cm	5 cm	1/2
3 cm	6 cm	2

on divise l'image par le départ

Les aires ne suivent pas les longueurs

C'est le piège le plus fréquent du chapitre. Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par k , mais les AIRES par k au carré, et les VOLUMES par k au cube. Avec $k = 3$, les longueurs triplent et l'aire est multipliée par 9. Avec $k = 2$, les volumes sont multipliés par 8.

k	longueurs	aires
2	$\times 2$	$\times 4$
3	$\times 3$	$\times 9$

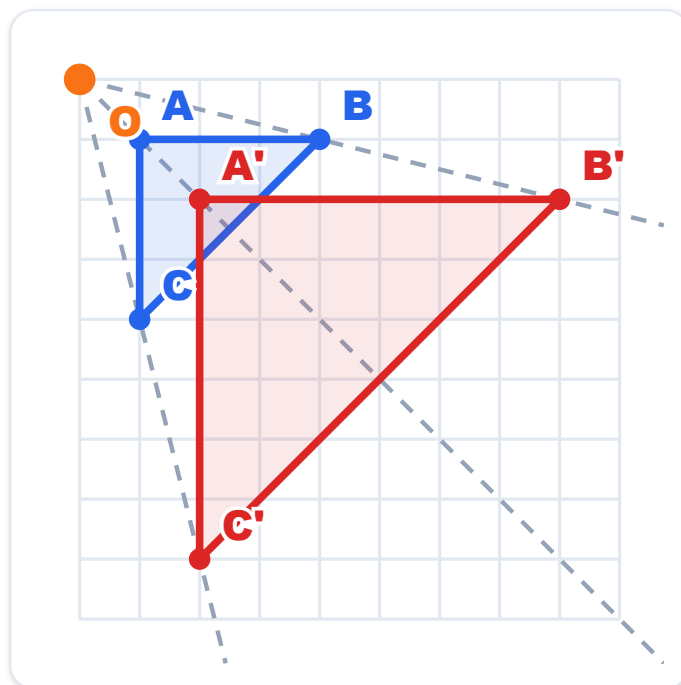
$\times k, \times k^2, \times k^3$

La formule : Transformations et homothétie

L'EFFET D'UN RAPPORT K

longueurs $\times k$ aires $\times k^2$
volumes $\times k^3$

$k = 2$: longueurs doublées, aire $\times 4$,
volume $\times 8$ · $k = 3$: longueurs $\times 3$, aire
 $\times 9$, volume $\times 27$



côtés doublés, mais quatre triangles tiennent dans le grand

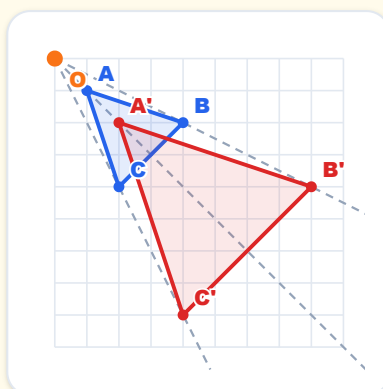
Méthode : Transformations et homothétie

1. Reconnaître une homothétie

On relie chaque point à son image et on prolonge. Si toutes les droites se coupent en un seul point, c'est une homothétie, et ce point est le centre. Si la figure a changé de taille sans changer de forme, c'est un indice de plus.

2. Construire l'image d'un point

On trace d'abord la DROITE (OA) — c'est la première étape, et l'oublier est l'erreur classique. On reporte ensuite la longueur : $OA' = k \times OA$, mesurée depuis O, sur cette droite. Un point à la bonne distance mais hors de la droite n'est pas l'image.



d'abord la droite, ensuite la longueur

3. Construire l'image d'une figure

On construit l'image de chaque sommet, un par un, puis on relie les images dans le même ordre. Trois sommets suffisent pour un triangle : les côtés se tracent après.

4. Calculer le rapport

On divise une longueur de l'image par la longueur correspondante de départ : $k = OA' : OA$. On vérifie sur une seconde paire de points — le même rapport doit revenir.

Selon ce que l'on cherche : Transformations et homothétie

On cherche une longueur de l'image

On multiplie la longueur de départ par k . Avec $k = 2$ et $OA = 3$ cm, on obtient $OA' = 6$ cm.

On cherche le rapport

On divise : $k = OA' : OA$. Avec $OA = 4$ cm et $OA' = 12$ cm, $k = 3$.

On cherche une aire ou un volume

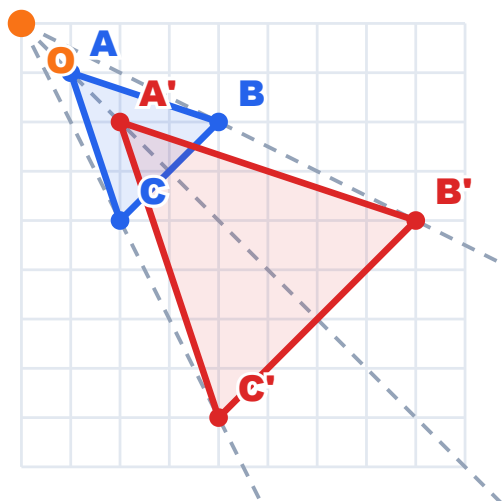
On multiplie l'aire par k au carré, le volume par k au cube — surtout pas par k .

Exemples corrigés : Transformations et homothétie

Trouver une longueur image

Homothétie de centre O et de rapport 2. On sait que $OA = 3$ cm.

Combien vaut OA' ?



$$OA' = 2 \times OA$$

Le rapport multiplie les longueurs issues de O . On calcule $OA' = 2 \times 3 = 6$ cm. Le point A' est sur la droite (OA) , à 6 cm de O .

Une réduction

Homothétie de centre O et de rapport $1/2$. On sait que $OA = 8$ cm.

Combien vaut OA' ?

On multiplie, même pour réduire : $OA' = 1/2 \times 8 = 4$ cm. La figure image est deux fois plus petite, et A' est entre O et A .

Retrouver le rapport

Homothétie de centre O. On mesure $OA = 4 \text{ cm}$ et $OA' = 12 \text{ cm}$.

Quel est le rapport k ?

OA	OA'	$k = OA' : OA$
4 cm	12 cm	3

Le rapport est un quotient : $k = OA' : OA = 12 : 4 = 3$.

La figure a été agrandie trois fois.

Le logo du club

À La Réunion, un logo de club est agrandi par homothétie de rapport 2. Une longueur du logo mesure 6 cm au départ.

Quelle sera cette longueur sur le logo agrandi, et que devient son aire ?

La longueur devient $2 \times 6 = 12 \text{ cm}$. L'aire, elle, est multipliée par 2 au carré, donc par 4 : le logo agrandi occupe quatre fois plus de place sur le maillot, pas deux.

Pièges à éviter : Transformations et homothétie

Placer A' à la bonne distance de O mais PAS sur la droite (OA) : la construction est fausse. La droite se trace en premier.

Croire qu'une homothétie de rapport 3 multiplie les aires par 3 : elle les multiplie par 9. Les aires suivent k au carré.

Croire qu'une homothétie de rapport 2 multiplie les volumes par 4 : c'est par 8. Les volumes suivent k au cube.

Calculer le rapport en soustrayant : avec $OA = 3 \text{ cm}$ et $OA' = 9 \text{ cm}$, k n'est pas $9 + 3$ ni $9 - 3$, mais $9 : 3 = 3$.

Oublier qu'une homothétie conserve les ANGLES : la figure change de taille, jamais de forme.

À retenir : Transformations et homothétie

Symétries, translation et rotation conservent les longueurs ; l'homothétie est la seule qui les change.

Dans une homothétie de centre O, les points O, A et A' sont toujours alignés.

Le rapport est un quotient : $k = OA' : OA$.

Longueurs $\times k$, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$.

La forme et les angles sont conservés, quelle que soit la valeur de k .

Un rapport négatif renvoie l'image de l'autre côté du centre : c'est le papillon de Thalès.

Exercices corrigés : Transformations et homothétie

1. Une homothétie de centre O et de rapport 4 transforme un segment de 7 cm. Quelle est la longueur de son image ?

Correction :

On multiplie par le rapport : $4 \times 7 = 28$ cm.

2. Par une homothétie de centre O, on mesure $OA = 10$ cm et $OA' = 5$ cm. Quel est le rapport ?

Correction :

$k = OA' : OA = 5 : 10 = 1/2$. Le rapport est plus petit que 1 : c'est une réduction.

3. Un élève affirme qu'une homothétie de rapport 3 multiplie l'aire d'une figure par 3. A-t-il raison ?

Correction :

Non. Les longueurs sont multipliées par 3, mais l'aire par 3 au carré, soit 9. Une figure trois fois plus longue et trois fois plus large occupe neuf fois la place.

4. Comment reconnaître, sur une figure, que le passage de ABC à A'B'C' est une homothétie ?

Correction :

On trace les droites (AA'), (BB') et (CC'). Si elles se coupent toutes en un même point, c'est une homothétie, et ce point est son centre O.

5. Une cuve est agrandie par homothétie de rapport 2. Par combien son volume est-il multiplié ?

Correction :

Par 2 au cube, soit 8. Une cuve deux fois plus haute, deux fois plus longue et deux fois plus large contient huit fois plus d'eau.