

Le triangle pour démontrer — cours de maths 4e

En sixième, on dessinait des triangles. En quatrième, on les DÉMONTRE : trois longueurs suffisent-elles à en construire un ? Deux figures qui se ressemblent sont-elles vraiment identiques ? Le triangle devient l'outil qui répond — parce qu'il est la seule figure que trois données bien choisies déterminent complètement.

LES DEUX CONTRÔLES

La somme des angles fait 180° · le plus grand côté est plus petit que la somme des deux autres

LES TROIS CAS D'ÉGALITÉ

3 côtés · 2 côtés et l'angle entre eux · 1 côté et ses 2 angles

LE PIÈGE

Trois ANGLES ne suffisent pas : ils donnent des triangles semblables

À quoi ça sert : le triangle pour démontrer

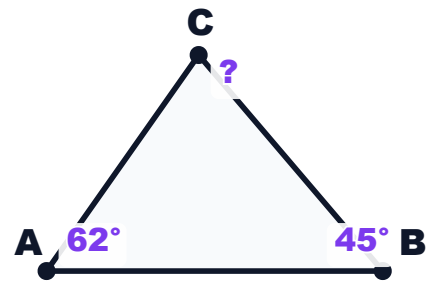
Le triangle est la seule figure indéformable, et c'est pour cela qu'il est partout dans les constructions. Un quadrilatère articulé aux sommets se déforme en losange ; un triangle articulé, non — ses trois côtés fixent ses trois angles, ce qui est exactement le premier cas d'égalité. Les charpentes des cases créoles, les pylônes électriques qui longent la route du littoral, les portiques de chantier et les ponts sont donc découpés en triangles. Les cas d'égalité servent aussi à mesurer sans se déplacer : c'est la triangulation, employée pour cartographier La Réunion au XIXe siècle et pour calculer la hauteur du Piton des Neiges bien avant qu'on puisse s'y poser un instrument. On mesure une base au sol et deux angles, et le troisième côté suit — un côté et ses deux angles, le troisième cas.

Un peu d'histoire : le triangle pour démontrer

Les trois cas d'égalité ne sont pas récents : ils occupent les propositions 4, 8 et 26 du premier livre des Éléments d'Euclide, vers 300 avant notre ère, et ils y sont démontrés — pas admis. La somme des angles y est la proposition 32, et Euclide la démontre en traçant une parallèle à un côté par le sommet opposé. Or cette démonstration a besoin du cinquième postulat, celui des parallèles, dont on a longtemps cherché à se passer. On n'y est jamais arrivé, et pour une raison qui a stupéfié les mathématiciens du XIXe siècle : Gauss, Bolyai et Lobatchevski ont montré au début des années 1830 qu'on pouvait bâtir des géométries parfaitement cohérentes où il est FAUX. Sur une sphère, la somme des angles d'un triangle dépasse 180° — un triangle tracé entre le pôle Nord, la côte du Gabon et celle de l'Indonésie a trois angles droits, soit 270° . La propriété qu'on apprend en quatrième n'est donc pas une évidence : c'est une conséquence de la géométrie plane, et elle ne vaut que là.

Définition : le triangle pour démontrer

Deux triangles sont **ÉGAUX** lorsqu'ils sont superposables : leurs trois côtés et leurs trois angles se correspondent deux à deux. Ils sont **SEMBLABLES** lorsqu'ils ont seulement la même forme — leurs angles se correspondent, mais l'un peut être un agrandissement de l'autre. ⚠ Deux triangles égaux sont toujours semblables ; l'inverse est faux, et c'est toute la difficulté de l'année.



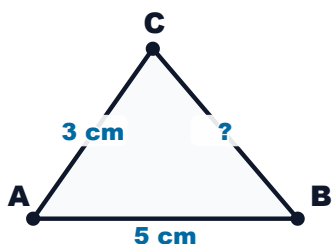
$$62 + 45 = 107, \text{ donc l'angle en C vaut } 180 - 107 = 73^\circ$$

La somme des trois angles vaut toujours 180° , dans n'importe quel triangle. Deux angles connus suffisent donc à trouver le troisième — et c'est ce qui rend deux angles aussi informatifs que trois.

Propriétés : le triangle pour démontrer

Le plus grand côté est plus petit que la somme des deux autres

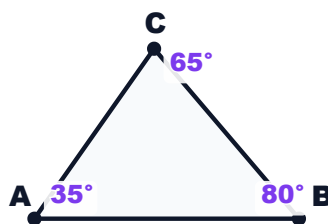
C'est l'inégalité triangulaire, et c'est la même idée que « le chemin le plus court est la ligne droite » : passer par un troisième point rallonge toujours. Avec 3 cm, 5 cm et 9 cm, aucun triangle n'est possible — 9 dépasse $3 + 5$. ⚠ L'égalité est le cas limite : avec 3, 5 et 8, les trois points sont **ALIGNÉS** et le triangle est plat.



le troisième côté est entre $5 - 3 = 2$ et $5 + 3 = 8$ cm

Les trois angles font toujours 180°

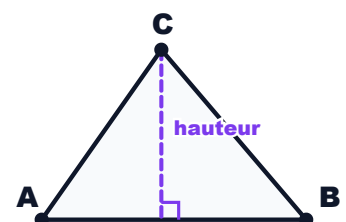
Dans n'importe quel triangle — grand, aplati, rectangle —, la somme des trois angles vaut exactement 180° . Deux angles connus donnent donc le troisième par soustraction. ★ C'est aussi un **CONTRÔLE** : si un énoncé annonce 70° , 60° et 70° , la somme fait 200° et le triangle n'existe pas.



$$35 + 80 + 65 = 180$$

Hauteur, médiatrice, médiane : deux conditions chacune

La **HAUTEUR** issue de C passe par C et coupe [AB] à angle droit. La **MÉDIATRICE** de [AB] passe par le **MILIEU** de [AB] et le coupe à angle droit. La **MÉDIANE** issue de C passe par C et par le milieu de [AB]. ⚠ Chacune se définit par deux conditions, et c'est en n'en retenant qu'une qu'on les confond.



elle part du **SOMMET**, et le petit carré marque l'angle droit

Trois données bien choisies suffisent

Il n'y a pas besoin de vérifier les six mesures pour affirmer que deux triangles sont égaux : trois suffisent, à condition d'être les bonnes. Il existe exactement TROIS cas, et le programme demande de savoir les nommer.

Données	ce qu'on connaît	égalité
	les 3 côtés	O
	2 côtés + l'angle entre eux	O
	1 côté + ses 2 angles	O
	les 3 angles	NON

trois cas, et un faux ami

Trois angles donnent la forme, pas la taille

Deux triangles dont les angles sont deux à deux égaux ont la même FORME : ils sont semblables. Mais rien ne fixe leur taille — l'un peut être dix fois plus grand. Dans deux triangles semblables, tous les côtés sont multipliés par un MÊME nombre, le rapport d'agrandissement.

Données	petit	x	grand
	4 cm	→	1
	5 cm	→	1
	7 cm	→	2

le même rapport sur tous les côtés

Un protocole ne doit rien laisser deviner

Écrire un protocole, c'est écrire une suite d'instructions qu'une autre personne peut suivre sans rien inventer. On commence toujours par ce qui se trace SANS RIEN CHERCHER : un segment de longueur donnée. ★ Et un bon protocole donne toujours le même triangle — parce que ses données forment un cas d'égalité.

Données	étape	on trouve
	1	[AB] de longueur donnée
	2	le cercle centré en A et passant par B
	3	le cercle centré en B et passant par A
	4	C à l'intersection des deux cercles

on part de ce qui ne se cherche pas

La formule : le triangle pour démontrer

DANS N'IMPORTE QUEL TRIANGLE ABC

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$$

La somme des trois angles est constante, et cette constance en fait un outil à double emploi : on l'utilise pour CALCULER un angle manquant, et pour CONTRÔLER qu'un triangle

Données	on connaît	on trouve
	50° et 60°	180 - 110 = 70°
	90° et 35°	180 - 125 = 55°
	70°, 60° et 70°	200° : impossible

calculer, ou contrôler

annoncé peut exister. Le second usage est celui qu'on oublie, et c'est celui qui rapporte le plus de points.

Méthode : le triangle pour démontrer

1. Vérifier qu'un triangle est possible

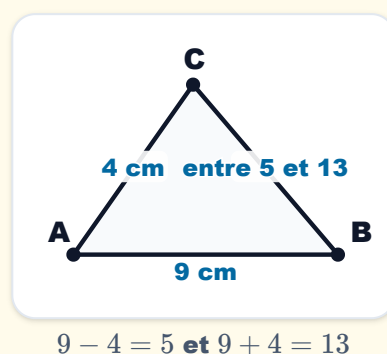
Deux contrôles indépendants, et on applique celui qui correspond aux données. Si l'énoncé donne des CÔTÉS : le plus grand est-il plus petit que la somme des deux autres ? Si l'énoncé donne des ANGLES : leur somme fait-elle 180° ? ★ Ces contrôles se font AVANT toute construction et coûtent quelques secondes.

Données	on me donne	je vérifie
	des côtés	le plus grand < somme des autres
	des angles	la somme fait 180°

les données commandent le contrôle

2. Encadrer le troisième côté

Quand deux côtés sont connus, le troisième est encadré par les DEUX bouts : il est plus petit que leur somme, et plus grand que leur différence. Avec 4 cm et 9 cm, il est entre 5 et 13 cm. ⚠ Oublier la borne BASSE est l'erreur fréquente — un côté de 1 cm ne referme pas le triangle.



3. Reconnaître un cas d'égalité

On regarde ce qui est donné, et on cherche si c'est l'un des trois cas. Puis on écrit la conclusion dans le bon ordre des lettres : si ABC est égal à DEF, alors A correspond à D, B à E, C à F — donc [AB] et [DE] ont la même longueur. ★ Trois données suffisent à en déduire les six.

Données	dans ABC	dans DEF
	le côté [AB]	le côté [DE]
	l'angle en A	l'angle en D
	le côté [BC]	le côté [EF]

l'ordre des lettres fait la correspondance

4. Trouver un côté dans deux triangles semblables

On cherche d'abord le RAPPORT, avec le seul couple de côtés dont on connaît les deux valeurs : on divise le grand par le petit. Puis on

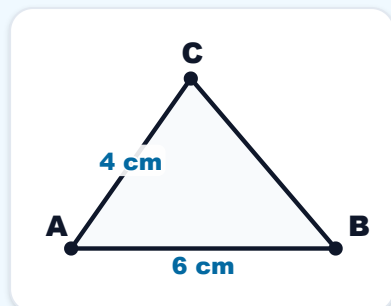
5. Écrire un protocole de construction

On commence par le segment dont on connaît la longueur. Puis, selon les données : deux cercles si on a les trois côtés, un angle reporté au rapporteur si on a deux côtés et

6. Choisir la propriété qui démontre

Démontrer, c'est choisir la propriété qui s'applique AUX DONNÉES qu'on a. On regarde d'abord ce qui est donné — des côtés, des angles, ou les deux — avant de chercher

applique ce rapport à l'autre côté.
C'est exactement un
agrandissement, donc de la
proportionnalité.



si le grand a 18 cm pour 6, le
rapport vaut 3 et l'autre côté
fait $4 \times 3 = 12$ cm

l'angle entre eux, deux angles
reportés aux extrémités si on a un
côté et ses deux angles. ★ Le
contrôle final est toujours le même :
le protocole laisse-t-il un choix ? S'il
en laisse un, il ne décrit pas UN
triangle.

Données	données	a
	3 côtés	s
	2 côtés + angle	ra
	1 côté + 2 angles	ra d

chaque cas a son geste

une propriété. ★ Les données
commandent l'outil, jamais l'inverse
: c'est le geste de la démonstration,
et il ne s'apprend qu'en le répétant.

Données	si on donne	
	3 côtés deux à deux égaux	
	2 angles d'un triangle	la
	3 angles deux à deux égaux	se
	3 longueurs seules	l

les données commandent
l'outil

Selon ce que l'on cherche : le triangle pour démontrer

On me demande si un triangle existe

Deux contrôles : la somme des
angles vaut-elle 180° ? le plus
grand côté est-il plus petit que la
somme des deux autres ? Un seul
des deux suffit à conclure à
l'impossibilité.

On me demande un angle ou un côté manquant

Pour un angle : 180 moins la
somme des deux autres. Pour un
côté dans un triangle semblable :
on trouve le rapport, puis on
multiplie.

On me demande de prouver que deux triangles sont égaux

On cherche lequel des trois cas
s'applique, on l'écrit, et on en déduit
les mesures manquantes. ⚠ Trois
angles ne prouvent rien de plus que
la ressemblance.

On me demande de construire une figure

On vérifie d'abord que la figure est
possible, puis on écrit le protocole
en commençant par le segment

donné. Un protocole qui laisse le choix est à revoir.

Exemples corrigés : le triangle pour démontrer

Le triangle impossible

Un élève annonce un triangle de côtés 4 cm, 6 cm et 11 cm.

Ce triangle peut-il exister ?

Données	le plus grand	les deux autres
	11 cm	$4 + 6 = 10$ cm
	$11 > 10$	impossible

On repère le plus grand côté, 11 cm, et on additionne les deux autres : $4 + 6 = 10$ cm. Or $11 > 10$: le plus grand côté dépasse la somme des deux autres. Aucun triangle n'est possible. ★ L'image aide à comprendre pourquoi : pour rejoindre les deux extrémités du côté de 11 cm en passant par un troisième point, il faudrait parcourir au moins 11 cm — or les deux autres côtés n'en offrent que 10. Le chemin est trop court, la figure ne se referme pas.

Les trois angles ne suffisent pas

Deux triangles ont chacun un angle de 40° et un angle de 75° .

Sont-ils forcément égaux ?

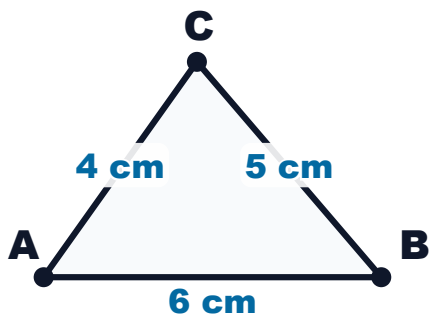
Données	ce qui est fixé	ce qui ne l'est pas
	la forme	la taille
	→ semblables	→ pas égaux

Le troisième angle se déduit : $40 + 75 = 115$, donc il vaut $180 - 115 = 65^\circ$. Les deux triangles ont bien leurs trois angles deux à deux égaux. Mais cela ne fixe que la FORME. Le premier peut avoir un côté de 3 cm et le second le côté correspondant de 30 cm : ils sont SEMBLABLES, pas égaux. ★ Pour conclure à l'égalité, il faudrait une longueur. Si l'on ajoutait « et le côté entre ces deux angles mesure 5 cm dans les deux », on tomberait sur le cas « un côté et ses deux angles » — et cette fois ils seraient égaux.

Le protocole qui ne laisse pas le choix

On veut construire un triangle ABC avec $AB = 6$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 5$ cm.

Écrire le protocole, et dire s'il donne toujours le même triangle.



trois côtés : un seul triangle possible

On vérifie d'abord que le triangle existe : le plus grand côté vaut 6, et $4 + 5 = 9 > 6$. C'est possible.
Protocole : tracer le segment [AB] de 6 cm. Tracer le cercle de centre A et de rayon 4 cm, puis le cercle de centre B et de rayon 5 cm. Le point C est à leur intersection. ★ Ce protocole donne TOUJOURS le même triangle, parce que les trois côtés forment un cas d'égalité. C'est exactement le lien que le programme demande : les données qui suffisent à construire un seul triangle sont celles des cas d'égalité. Construire et démontrer sont le même savoir vu des deux côtés.

Pièges à éviter : le triangle pour démontrer

Oublier la borne basse de l'inégalité triangulaire. Le troisième côté est plus petit que la somme, mais aussi plus grand que la différence.

Croire que trois angles suffisent à prouver l'égalité. Ils donnent des triangles semblables : même forme, taille libre.

Confondre la hauteur et la médiatrice. Les deux coupent le côté à angle droit, mais la hauteur part d'un SOMMET et la médiatrice d'un MILIEU.

Confondre la hauteur et la médiane. La médiane va au milieu du côté opposé, sans angle droit.

Ne pas contrôler la somme des angles avant de calculer. Un énoncé qui annonce 200° au total est faux, et tout le calcul qui suit l'est aussi.

Écrire l'égalité de deux triangles sans respecter l'ordre des lettres. Dans « ABC égal à DEF », c'est [AB] qui correspond à [DE], pas à [DF].

Appliquer un rapport d'agrandissement à un seul côté. Dans deux triangles semblables, TOUS les côtés sont multipliés par le même nombre.

À retenir : le triangle pour démontrer

La somme des trois angles d'un triangle vaut toujours 180° .

Le plus grand côté est strictement plus petit que la somme des deux autres : c'est l'inégalité triangulaire.

Le troisième côté est encadré par la différence et la somme des deux autres.

Deux triangles sont ÉGAUX s'ils sont superposables, SEMBLABLES s'ils ont seulement la même forme.

Trois cas d'égalité : les 3 côtés ; 2 côtés et l'angle entre eux ; 1 côté et les 2 angles qui le touchent.

Trois angles ne sont PAS un cas d'égalité : ils donnent des triangles semblables.

La hauteur part d'un sommet et coupe le côté opposé à angle droit ; la médiatrice part du milieu ; la médiane va au milieu.

Les données qui suffisent à construire UN SEUL triangle sont exactement celles des cas d'égalité.

Exercices corrigés : le triangle pour démontrer

1. Peut-on construire un triangle de côtés 5 cm, 7 cm et 13 cm ?

Correction :

Non. Le plus grand côté vaut 13, et $5 + 7 = 12$. Comme $13 > 12$, la figure ne se referme pas.

2. Deux côtés d'un triangle mesurent 6 cm et 10 cm. Entre quelles valeurs se situe le troisième ?

Correction :

Entre $10 - 6 = 4$ cm et $10 + 6 = 16$ cm. ⚠ Les deux bornes sont exclues : à 4 ou à 16, le triangle serait plat.

3. Dans un triangle, deux angles mesurent 47° et 68° . Combien mesure le troisième ?

Correction :

$47 + 68 = 115$, puis $180 - 115 = 65^\circ$.

4. Un élève annonce un triangle dont les angles mesurent 80° , 60° et 50° . Est-ce possible ?

Correction :

Non : $80 + 60 + 50 = 190^\circ$ au lieu de 180. Aucun triangle ne peut avoir ces angles.

5. Dans le triangle ABC, qu'est-ce que la médiatrice de [BC] ? Et la hauteur issue de A ?

Correction :

La médiatrice de [BC] passe par le MILIEU de [BC] et le coupe à angle droit. La hauteur issue de A passe par le SOMMET A et coupe [BC] à angle droit. Elles sont toutes deux perpendiculaires à [BC], et c'est ce point commun qui les fait confondre.

6. Deux triangles ont deux côtés égaux deux à deux et l'angle compris entre eux égal. Sont-ils égaux ?

Correction :

Oui : c'est le cas « deux côtés et l'angle entre eux ». ⚠ L'angle doit être ENTRE les deux côtés — s'il est ailleurs, ce n'est plus un cas d'égalité.

7. Les triangles ABC et DEF sont égaux. Dans ABC, [AB] mesure 7 cm et l'angle en B mesure 52°. Que peut-on dire de DEF ?

Correction :

[DE] mesure 7 cm et l'angle en E mesure 52°. On suit l'ordre des lettres : A correspond à D, B à E, C à F.

8. Deux triangles sont semblables. Un côté du petit mesure 5 cm et son correspondant dans le grand 20 cm. Un autre côté du petit mesure 7 cm : combien mesure son correspondant ?

Correction :

Le rapport vaut $20 \div 5 = 4$. Donc le côté cherché mesure $7 \times 4 = 28$ cm.

9. On veut construire un triangle ABC avec AB = 7 cm, AC = 5 cm et BC = 4 cm. Par quoi commence le protocole ?

Correction :

Par tracer [AB] de 7 cm : c'est ce qui se trace sans rien chercher. Puis le cercle de centre A et de rayon 5 cm, celui de centre B et de rayon 4 cm ; C est à leur intersection.

10. On sait que deux angles d'un triangle mesurent 55° et 65°. Quelle propriété permet de conclure, et que conclut-on ?

Correction :

La somme des angles d'un triangle. $55 + 65 = 120$, donc le troisième angle vaut $180 - 120 = 60^\circ$.