

Les triangles : angles, familles et existence

cours et exercices corrigés de maths 3e

On ne peut pas dessiner n'importe quel triangle. Trois longueurs peuvent se refuser à en former un, et trois angles aussi — mais pour des raisons différentes, et ce sont deux verrous indépendants. La cinquième vous a donné le premier, qui porte sur les côtés. La troisième donne le second, qui porte sur les angles : leur somme vaut exactement 180° , jamais autre chose.

LA RÈGLE DES ANGLES

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, toujours

LA RÈGLE DES CÔTÉS

Le plus grand côté reste INFÉRIEUR à la somme des deux autres

LE PIÈGE

Un triangle équilatéral EST isocèle — les familles s'emboîtent

À quoi ça sert : les triangles : angles, familles et existence

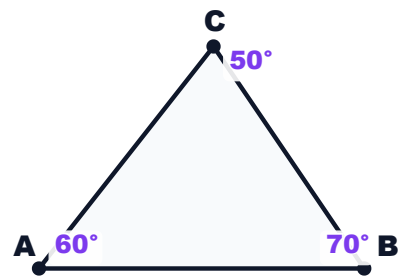
Le triangle est la seule figure qui ne se déforme pas : un quadrilatère articulé s'affaisse en losange, un triangle ne bouge pas. C'est pourquoi on en trouve partout dès qu'il faut tenir — les fermes de charpente d'une case créole, les pylônes électriques qui longent la route des Tamarins, les échafaudages, les ponts. La raison est exactement le contenu de cette fiche : trois longueurs déterminent un triangle unique, alors que quatre longueurs laissent un quadrilatère libre de se déformer. La rigidité d'une structure n'est pas une propriété du métal, c'est une propriété de la géométrie.

Un peu d'histoire : les triangles : angles, familles et existence

Que la somme des angles d'un triangle vaille 180° figure dans les *Éléments* d'Euclide, vers 300 avant notre ère, et sa démonstration repose entièrement sur le postulat des parallèles. Ce détail est devenu fondamental bien plus tard : au XIX^e siècle, Lobatchevski et Bolyai construisent des géométries cohérentes où ce postulat est faux — et où la somme des angles d'un triangle vaut MOINS de 180° . Sur une sphère, à l'inverse, elle vaut davantage : un triangle tracé entre le pôle Nord et deux points de l'équateur peut avoir trois angles droits, donc 270° . La règle apprise ici est donc vraie du plan, et seulement de lui.

Définition : les triangles : angles, familles et existence

Un triangle est une figure à trois sommets et trois côtés. Deux conditions gouvernent son existence, et il faut les distinguer. Sur les **ANGLES** : la somme des trois mesures vaut toujours 180° , ce qui interdit par exemple 100° , 50° et 40° . Sur les **CÔTÉS** : la plus grande longueur doit rester **STRICTEMENT** inférieure à la somme des deux autres, ce qui interdit 3 cm, 4 cm et 7 cm. Un triangle qui vérifie l'une mais pas l'autre n'existe pas davantage.



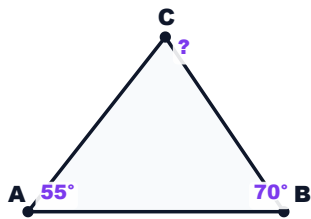
Trois angles quelconques, mais dont la somme fait toujours 180° : ici $60 + 70 + 50$. Connaître deux d'entre eux suffit donc à trouver le troisième.

Propriétés : les triangles : angles, familles et existence

La somme des angles vaut toujours 180°

Quelle que soit sa forme, un triangle a trois angles dont la somme fait exactement 180° . C'est le résultat le plus utile du chapitre, car il permet de trouver le troisième angle dès qu'on connaît les deux autres : si $\hat{A} = 55^\circ$ et $\hat{B} = 70^\circ$, alors $\hat{C} = 180 - 55 - 70 = 55^\circ$.

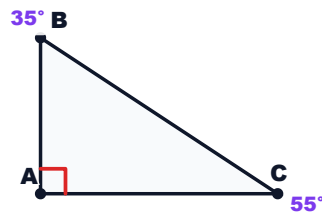
⊖ Répondre 360° confond avec le tour complet, ou avec la somme des angles d'un quadrilatère.



Deux angles connus, le troisième s'en déduit : $180 - 55 - 70 = 55^\circ$.

Dans un triangle rectangle, les deux aigus font 90°

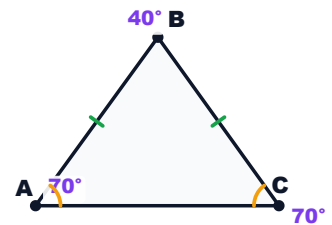
L'angle droit occupe déjà 90° des 180° disponibles : il ne reste donc que 90° à partager entre les deux autres. Si l'un mesure 35° , l'autre vaut nécessairement 55° . ⊖ Cela interdit aussi qu'un triangle possède DEUX angles droits : la somme atteindrait 180° à elle seule, et il ne resterait rien pour le troisième sommet.



$90 + 35 + 55 = 180$: les deux angles aigus se partagent ce qui reste.

Dans un isocèle, les angles à la base sont égaux

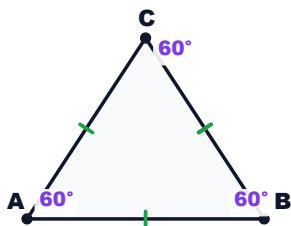
Un triangle isocèle possède deux côtés de même longueur, et ses deux angles à la base sont alors égaux. La réciproque est vraie également : deux angles égaux entraînent deux côtés égaux. Si l'angle au sommet mesure 40° , il reste 140° à partager en deux parts identiques, soit 70° chacune.



Sommet à 40° : les deux angles à la base valent $(180 - 40) \div 2 = 70^\circ$.

L'équilatéral a trois angles de 60°

Ses trois côtés sont égaux, donc ses trois angles aussi : chacun vaut $180 \div 3 = 60^\circ$. ⚠ Et un triangle équilatéral EST un triangle isocèle — il en possède la propriété, avec deux côtés égaux, et même davantage. Les familles s'emboîtent au lieu de s'exclure, ce qui est le contraire de ce que suggère le langage courant.



Trois côtés égaux, trois angles de 60° : $3 \times 60 = 180$.

Les familles s'emboîtent, elles ne s'opposent pas

« Isocèle » signifie AU MOINS deux côtés égaux : tout équilatéral est donc isocèle. En revanche, un triangle à deux côtés égaux n'est pas forcément équilatéral — il lui manquerait le troisième. Un triangle peut d'ailleurs cumuler deux qualités : rectangle ET isocèle, si son angle droit sépare deux côtés de même longueur.

famille	ce qu'elle exige
isocèle	au moins 2 côtés égaux
équilatéral	les 3 — donc isocèle
rectangle	un angle droit

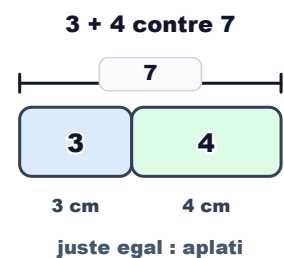
l'équilatéral est un isocèle

Un triangle peut appartenir à plusieurs familles à la fois.

Le second verrou : l'inégalité triangulaire

Trois longueurs ne forment un triangle que si la plus grande est STRICTEMENT inférieure à la somme des deux autres. Avec 3, 4 et 7, la somme des deux petites vaut exactement 7 : les deux côtés se posent bout à bout sur le troisième sans laisser aucune hauteur, et la figure est APLATIE.

🚫 Le cas d'égalité ne donne donc pas un triangle, contrairement à ce que l'on croit souvent.



Les deux petits côtés couvrent exactement le grand : il ne reste pas de hauteur.

Deux verrous indépendants

Les deux conditions ne se remplacent pas. Des angles de 100° , 50° et 40° sont refusés par la règle des angles, puisqu'ils totalisent 190° . Des côtés de 2, 3 et 10 cm sont refusés par celle des longueurs. Vérifier l'une ne dispense jamais de l'autre : c'est la donnée fournie par l'énoncé qui indique laquelle appliquer.

on donne	on vérifie
trois angles	somme = 180°
trois côtés	le grand < somme
100° , 50° , 40°	190° : refusé

un verrou par grandeur

La règle à appliquer dépend de ce que l'énoncé donne.

Quelles données déterminent un triangle unique

Les trois longueurs des côtés en déterminent un seul, à la position près. Deux côtés et l'angle entre eux également. ⚠ En revanche, connaître les trois ANGLES ne suffit pas : tous les triangles équilatéraux ont les mêmes angles sans avoir la même taille. Les angles fixent la FORME, les longueurs fixent la taille.

données	triangle unique ?
3 côtés	oui
2 côtés + l'angle entre	oui
3 angles	non : la taille manque

les angles donnent la forme

Deux triangles de mêmes angles se ressemblent, sans être superposables.

La formule : les triangles : angles, familles et existence

LA SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Elle sert dans les deux sens. De gauche à droite pour VÉRIFIER qu'un triplet d'angles est possible ; de droite à gauche pour TROUVER un angle manquant, en retranchant les deux connus de 180.

cas	le troisième angle
55° et 70°	55°
90° et 35°	55°
100° et 50°	30°

180 moins les deux connus

Une soustraction suffit — encore faut-il partir de 180 et non de 360.

Méthode : les triangles : angles, familles et existence

1. Trouver un angle manquant

On additionne les deux angles connus, puis on retranche le total de 180° . Contrôle immédiat : les trois angles obtenus doivent redonner 180, et aucun ne peut être nul ou négatif.

2. Reconnaître la nature d'un triangle

On regarde d'abord les côtés : trois égaux, c'est équilatéral ; deux égaux, isocèle. Puis les angles : un angle droit, c'est rectangle. ⚠ Et l'on n'oublie pas qu'un triangle peut cumuler deux natures.

3. Tester si trois longueurs conviennent

On repère la PLUS GRANDE, on additionne les deux autres, et on compare. Strictement inférieure : le triangle existe. Égale ou supérieure : il n'existe pas. Tester les trois combinaisons est inutile — seule la plus grande peut poser problème.

4. Tester si trois angles conviennent

On les additionne : le total doit valoir exactement 180° . Ni plus, ni moins. C'est un test différent du précédent, et l'énoncé indique lequel appliquer selon qu'il donne des degrés ou des centimètres.

5. Dans un isocèle, partager ce qui reste

Si l'angle au sommet est connu, on le retranche de 180 puis on divise par deux. Si c'est un angle à la base qui est connu, on le double avant de retrancher. Les deux chemins se contrôlent : la somme doit toujours retomber sur 180.

Selon ce que l'on cherche : les triangles : angles, familles et existence

On me donne deux angles

Je retranche leur somme de 180° pour obtenir le troisième.

On me donne trois longueurs

Je compare la plus grande à la somme des deux autres.
Strictement inférieure : le triangle est constructible.

On me donne trois angles

Je vérifie que la somme vaut 180° .
Si oui, la FORME est déterminée — mais pas la taille.

On me demande la nature du triangle

Je regarde les côtés, puis les angles, et je n'exclus pas qu'il appartienne à deux familles.

Le triangle est isocèle et on me donne un angle

Je repère si c'est l'angle au sommet ou un angle à la base, puis je partage les 180° en conséquence.

Exemples corrigés : les triangles : angles, familles et existence

Le troisième angle

Dans un triangle ABC , $\hat{A} = 55^\circ$ et $\hat{B} = 70^\circ$.

Combien mesure $\hat{C}$?

La somme des trois angles vaut 180° . On additionne d'abord les deux connus : $55 + 70 = 125$. On retranche ensuite de 180 : $\hat{C} = 180 - 125 = 55^\circ$. Contrôle : $55 + 70 + 55 = 180$. C'est juste. On remarque au passage que deux angles sont égaux — le triangle est donc isocèle, ce que l'énoncé ne disait pas.

Trois longueurs impossibles

On veut un triangle de côtés 3 cm, 4 cm et 7 cm.

Est-il constructible ?

côtés	3 + 4	verdict
3, 4, 7	= 7	aplati
3, 4, 6	> 6	possible
3, 4, 8	< 8	impossible

il faut STRICTEMENT inférieur

Un seul centimètre sépare le possible de l'impossible.

Le plus grand côté mesure 7 cm. La somme des deux autres vaut $3 + 4 = 7$ cm. Or l'inégalité triangulaire exige que le plus grand soit STRICTEMENT inférieur à cette somme : ici il lui est égal. Le triangle n'est donc pas constructible — en posant les deux petits côtés bout à bout, on recouvre exactement le grand, sans dégager la moindre hauteur, et la figure est aplatie. 🚫 C'est le cas que l'on croit le plus souvent acceptable, précisément parce qu'il semble « tout juste » possible.

L'isocèle et son sommet

Un triangle isocèle a un angle au sommet de 40° .

Combien mesure chacun des angles à la base ?

L'angle au sommet occupe 40° sur les 180° disponibles. Il en reste donc $180 - 40 = 140^\circ$ à partager entre les deux angles à la base, qui sont ÉGAUX puisque le triangle est isocèle. Chacun vaut $140 \div 2 = 70^\circ$. Contrôle : $40 + 70 + 70 = 180$.

⚠ L'erreur consiste à diviser 180 par deux au lieu de 140 — c'est-à-dire à oublier de retirer d'abord l'angle au sommet.

Trois angles refusés

On voudrait un triangle dont les angles mesurent 100° , 50° et 40° .

Est-ce possible ?

On additionne : $100 + 50 + 40 = 190^\circ$. Or la somme doit valoir exactement 180° . Le triangle est donc impossible, et il l'est pour une raison qui n'a rien à voir avec les longueurs — aucune valeur de côtés ne pourrait rattraper ce dépassement. C'est là tout l'intérêt d'avoir DEUX critères d'existence : celui-ci se prononce sur des degrés, sans qu'aucune longueur soit fournie.

Pièges à éviter : les triangles : angles, familles et existence

Croire que la somme des angles vaut 360° . C'est 180° — 360° est le tour complet, ou la somme des angles d'un quadrilatère.

Croire qu'un triangle à deux côtés égaux est forcément équilatéral. Il est isocèle ; l'équilatéral en exige trois.

Croire qu'un équilatéral n'est pas isocèle. « Isocèle » demande AU MOINS deux côtés égaux : l'équilatéral en a trois, donc il l'est.

Accepter un triangle dont le plus grand côté ÉGALE la somme des deux autres. Il est aplati, donc il n'existe pas : l'inégalité doit être stricte.

Imaginer un triangle à deux angles droits. Ils totaliseraient déjà 180° , et il ne resterait rien pour le troisième sommet.

Diviser 180 par deux pour trouver les angles à la base d'un isocèle. Il faut d'abord retrancher l'angle au sommet.

Croire que trois angles déterminent un triangle unique. Ils en fixent la forme, jamais la taille.

À retenir : les triangles : angles, familles et existence

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ dans tout triangle du plan.

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus totalisent 90° .

Dans un isocèle, les deux angles à la base sont égaux.

Chaque angle d'un triangle équilatéral mesure 60° .

Le plus grand côté doit être STRICTEMENT inférieur à la somme des deux autres.

Angles et longueurs sont deux verrous indépendants : vérifier l'un ne dispense pas de l'autre.

Exercices corrigés : les triangles : angles, familles et existence

1. Dans un triangle, deux angles mesurent 48° et 62° . Combien mesure le troisième ?

Correction :

$48 + 62 = 110$, puis $180 - 110 = 70^\circ$. Contrôle : $48 + 62 + 70 = 180$.

2. Un élève affirme que la somme des angles d'un triangle vaut 360° . A-t-il raison ?

Correction :

Non, elle vaut 180° . Il confond sans doute avec le tour complet, ou avec la somme des angles d'un quadrilatère, qui vaut bien 360° .

3. Dans un triangle rectangle, un angle aigu mesure 35° . Combien mesure l'autre ?

Correction :

L'angle droit occupe 90° , il reste donc 90° pour les deux aigus : l'autre vaut $90 - 35 = 55^\circ$.

4. Un triangle peut-il avoir deux angles droits ?

Correction :

Non. Deux angles droits totalisent déjà 180° , et il ne resterait rien pour le troisième angle, qui ne peut pas être nul.

5. Un triangle équilatéral est-il aussi isocèle ?

Correction :

Oui. « Isocèle » signifie avoir au moins deux côtés de même longueur ; l'équilatéral en a trois, donc il satisfait la condition — et même davantage.

6. Combien mesure chaque angle d'un triangle équilatéral ?

Correction :

$180 \div 3 = 60^\circ$. Les trois côtés étant égaux, les trois angles le sont aussi.

7. Peut-on construire un triangle de côtés 2 cm, 3 cm et 10 cm ?

Correction :

Non. Le plus grand côté mesure 10 cm, et la somme des deux autres vaut $2 + 3 = 5$ cm, ce qui est bien inférieur à 10. Les deux petits côtés ne se rejoignent jamais.

8. Un élève dit : « Si le plus grand côté est égal à la somme des deux autres, le triangle existe. » A-t-il raison ?

Correction :

Non. Dans ce cas la figure est aplatie : les deux petits côtés se posent exactement sur le grand, sans dégager de hauteur. L'inégalité doit être STRICTE.

9. Dans un triangle isocèle, l'angle au sommet mesure 50° . Combien mesure chaque angle à la base ?

Correction :

Il reste $180 - 50 = 130^\circ$ à partager en deux parts égales : chacune vaut 65° . Contrôle : $50 + 65 + 65 = 180$.

10. Un élève dit : « Si un triangle a deux angles égaux, alors il a deux côtés égaux. » A-t-il raison ?

Correction :

Oui. C'est la réciproque de la propriété de l'isocèle, et elle est vraie : deux angles égaux entraînent deux côtés égaux, donc le triangle est isocèle.