

Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

cours et exercices corrigés de maths 3e

En quatrième, un seul rapport : le cosinus. En troisième il en arrive deux autres, et avec eux la vraie question du chapitre — laquelle des trois formules employer. Un élève qui rate un exercice de trigonométrie se trompe rarement dans le calcul : il se trompe de rapport.

PRÉREQUIS

**Triangle rectangle,
Pythagore, cosinus (4e)**

L'IDÉE CLÉ

**Deux côtés connus sur
trois : le rapport est décidé**

OUTIL

**Calculatrice en mode
DEGRÉS**

À quoi ça sert : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

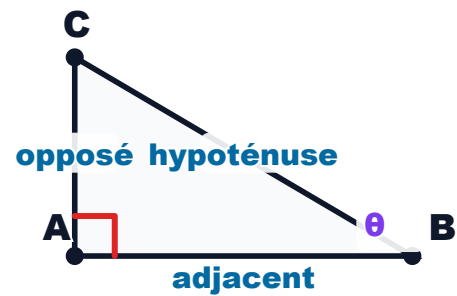
La trigonométrie mesure ce qu'on ne peut pas atteindre. Depuis le pied du Piton de la Fournaise, un angle de visée et une distance au sol donnent une hauteur qu'aucun décamètre ne mesurerait. C'est le principe du théodolite des géomètres, de la pente d'une toiture calculée avant de la construire, de l'inclinaison d'un panneau solaire, et de la rampe d'accès dont la norme impose une pente maximale. Partout où l'on connaît un angle et une longueur, la trigonométrie donne l'autre longueur.

Un peu d'histoire : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

Elle naît de l'astronomie : au II^e siècle avant notre ère, Hipparque de Nicée dresse la première table de cordes pour prévoir la position des astres. Les mathématiciens indiens, autour du Ve siècle, remplacent la corde par la demi-corde — leur mot voyage jusqu'en arabe, puis est traduit en latin par « sinus », qui signifiait « pli » : le sinus doit son nom à un contresens de traducteur. Le mot « tangente », lui, vient du latin « toucher ».

Définition : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

Dans un triangle rectangle, chaque angle aigu définit trois rapports de longueurs. L'HYPOTÉNUSE est toujours le côté en face de l'angle droit : elle ne change jamais. Les deux autres, en revanche, dépendent de l'angle que l'on regarde : le côté OPPOSÉ est celui d'en face, le côté ADJACENT est celui qui touche l'angle sans être l'hypoténuse. Le cosinus vaut adjacent divisé par hypoténuse, le sinus opposé divisé par hypoténuse, la tangente opposé divisé par adjacent.



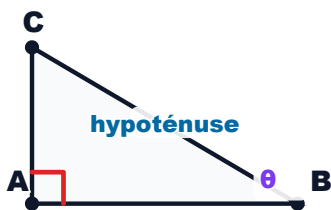
vu depuis l'angle θ : l'hypoténuse ne bouge pas, les deux autres changent

Le triangle est rectangle en A. Vu depuis l'angle B, le côté AC est opposé et le côté AB adjacent. Vu depuis C, les deux échangent leurs rôles.

Propriétés : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

L'hypoténuse ne dépend pas de l'angle

C'est le côté en face de l'angle droit, et c'est aussi le plus long des trois. On la repère EN PREMIER, avant même de choisir une formule : les trois rapports se définissent par rapport à elle.



en face de l'angle droit, et toujours la plus longue

Opposé et adjacent changent avec l'angle

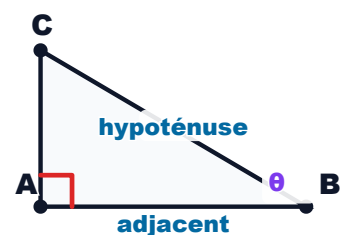
C'est la source d'erreur numéro un du chapitre. Le côté opposé est en face de l'angle étudié, l'adjacent le touche sans être l'hypoténuse. Si l'on change d'angle aigu, les deux échangent leurs noms — alors que le triangle, lui, n'a pas bougé.

vu depuis	opposé
l'angle B	AC
l'angle C	AB

le même triangle, deux lectures

Le cosinus : adjacent sur hypoténuse

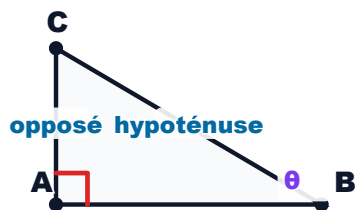
Le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent par l'hypoténuse. Comme l'hypoténuse est le plus long côté, ce quotient est toujours inférieur à 1 : un cosinus supérieur à 1 signale une erreur, jamais un triangle bizarre.



$$\cos(\theta) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Le sinus : opposé sur hypoténuse

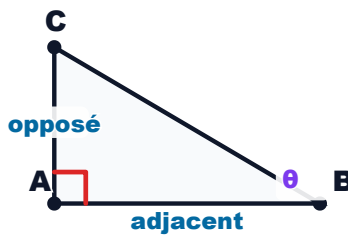
Le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé par l'hypoténuse. Lui aussi reste inférieur à 1, pour la même raison. Et comme les deux angles aigus se complètent, le sinus de l'un vaut le cosinus de l'autre : $\sin(30^\circ)$ et $\cos(60^\circ)$ valent tous deux 0,5.



$$\sin(\theta) = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

La tangente : opposé sur adjacent

La tangente est la seule des trois qui n'utilise pas l'hypoténuse : c'est le quotient de l'opposé par l'adjacent. Elle n'est donc pas bornée par 1 — $\tan(45^\circ)$ vaut exactement 1, et elle grandit sans limite quand l'angle approche 90° .



$$\tan(\theta) = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

Les deux angles aigus se complètent

La somme des angles d'un triangle vaut 180° , et l'angle droit en prend 90 : il reste 90° à partager entre les deux angles aigus. Si l'un mesure 40° , l'autre mesure 50° . C'est un contrôle gratuit sur tout résultat d'angle.

un angle	l'autre
40°	50°
30°	60°
45°	45°

leur somme fait toujours 90°

Deux côtés connus décident du rapport

On ne choisit pas la formule, on la LIT sur les données. Adjacent et hypoténuse : cosinus. Opposé et hypoténuse : sinus. Opposé et adjacent, sans hypoténuse : tangente. Et si aucun angle n'intervient, ce n'est pas de la trigonométrie du tout, c'est Pythagore.

ce que l'on a	on utilise
adjacent + hypoténuse	cosinus
opposé + hypoténuse	sinus
opposé + adjacent	tangente
trois côtés, aucun angle	Pythagore

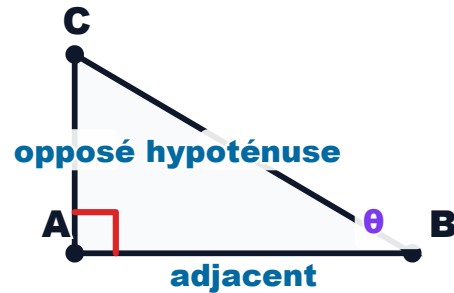
les données décident, pas l'élève

La formule : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

LES TROIS RAPPORTS, DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

$$\cos \theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \quad \sin \theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \quad \tan \theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

Deux rapports sur trois emploient l'hypoténuse ; seule la tangente s'en passe. Un cosinus ou un sinus supérieur à 1 est toujours une erreur.



les trois côtés, vus depuis θ

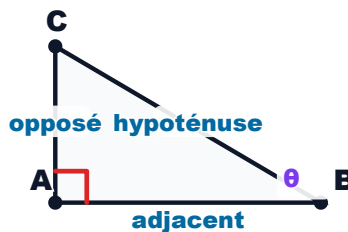
Méthode : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

1. Repérer l'hypoténuse en premier

Avant toute chose, on trouve l'angle droit et on nomme l'hypoténuse : le côté d'en face. Sans elle, impossible de savoir lequel des deux autres est l'opposé et lequel est l'adjacent.

2. Se placer sur l'angle étudié

On se met « dans » l'angle marqué. Le côté d'en face est l'opposé, celui qui touche l'angle est l'adjacent. Changer d'angle change ces deux noms, jamais l'hypoténuse.



on se place sur θ , puis on nomme

3. Lire le rapport sur les données

On entoure les deux longueurs connues (ou la longueur connue et celle cherchée), et on lit dans le tableau quel rapport les relie. Le choix n'est jamais libre.

4. Isoler ce que l'on cherche

Pour une longueur, on transforme l'égalité : de $\cos(\theta) = \text{adjacent} / \text{hypoténuse}$ on tire $\text{adjacent} = \text{hypoténuse} \times \cos(\theta)$. Pour un angle, on emploie la touche inverse : $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$, calculatrice en mode degrés.

Selon ce que l'on cherche : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

On cherche une longueur

On connaît un angle et une longueur : on écrit le rapport, puis on multiplie. Hypoténuse 10 cm et angle 60° donnent un adjacent de $10 \times \cos(60^\circ) = 5 \text{ cm}$.

On cherche un angle

On connaît deux longueurs : on écrit le rapport, puis on applique la fonction inverse. Opposé 5 et hypoténuse 10 donnent $\sin^{-1}(0,5) = 30^\circ$.

On ne connaît aucun angle

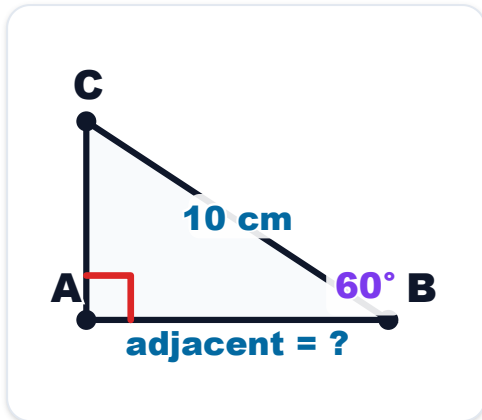
Trois côtés et pas d'angle : la trigonométrie ne sert à rien ici, c'est le théorème de Pythagore qu'il faut employer.

Exemples corrigés : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

Une longueur avec le cosinus

Triangle rectangle. L'hypoténuse mesure 10 cm et l'angle θ vaut 60° . On cherche le côté adjacent à θ .

Combien mesure le côté adjacent ?



on connaît l'hypoténuse, on cherche l'adjacent

On a l'hypoténuse et on cherche l'adjacent : c'est le cosinus. On écrit $\cos(60^\circ) = \text{adjacent} / 10$, donc $\text{adjacent} = 10 \times \cos(60^\circ) = 10 \times 0,5 = 5 \text{ cm}$.

Un angle avec le cosinus

Le côté adjacent à l'angle θ mesure 5 cm et l'hypoténuse 10 cm.

Combien vaut θ ?

$\cos(\theta) = 5 / 10 = 0,5$. On applique la fonction inverse : $\theta = \cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$. Contrôle : l'autre angle aigu vaut donc 30° , et $60 + 30 = 90$.

Un angle avec la tangente

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à θ et le côté adjacent à θ sont égaux.

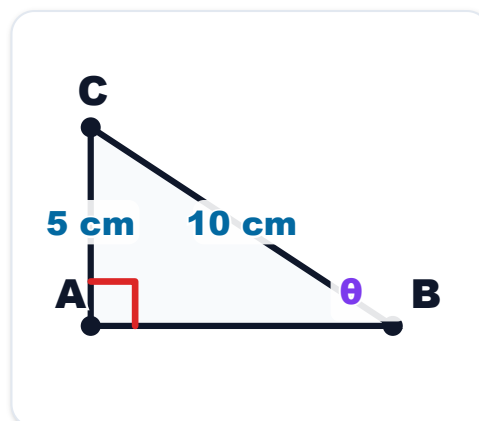
Combien vaut θ ?

$\tan(\theta) = \text{opposé} / \text{adjacent} = 1$, puisque les deux longueurs sont égales. Or $\tan(45^\circ) = 1$, donc $\theta = 45^\circ$.
Le triangle est rectangle isocèle, et l'autre angle aigu vaut aussi 45° .

Type brevet

L'hypoténuse mesure 10 cm et le côté opposé à l'angle θ mesure 5 cm.

Combien vaut θ ?



l'opposé et l'hypoténuse : donc le sinus

Opposé et hypoténuse : c'est le sinus. $\sin(\theta) = 5 / 10 = 0,5$, donc $\theta = \sin^{-1}(0,5) = 30^\circ$. Attention à ne pas prendre le cosinus par habitude : c'est l'opposé qui est donné, pas l'adjacent.

Pièges à éviter : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

Employer le cosinus par habitude. Le rapport se lit sur les données : opposé et hypoténuse appellent le sinus, pas le cosinus.

Croire que l'opposé et l'adjacent sont fixes. Ils échangent leurs noms dès qu'on regarde l'autre angle aigu ; seule l'hypoténuse ne change jamais.

Trouver un cosinus ou un sinus supérieur à 1 et le garder : c'est impossible, l'hypoténuse étant le plus long côté. Le calcul est à refaire.

Oublier de passer la calculatrice en mode DEGRÉS : en radians, $\cos(60)$ ne vaut pas 0,5 mais $-0,95$.

Sortir la trigonométrie quand aucun angle n'intervient : avec trois côtés et pas d'angle, c'est Pythagore.

Confondre $\cos(\theta)$ et $\cos^{-1}$: la première donne un nombre à partir d'un angle, la seconde un angle à partir d'un nombre.

À retenir : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

L'hypoténuse est en face de l'angle droit ; elle ne dépend pas de l'angle étudié.

Opposé et adjacent, si : ils échangent quand on change d'angle aigu.

$\cos = \text{adjacent} / \text{hypoténuse}$; $\sin = \text{opposé} / \text{hypoténuse}$; $\tan = \text{opposé} / \text{adjacent}$.

Seule la tangente n'utilise pas l'hypoténuse : elle peut dépasser 1, les deux autres jamais.

Pour un angle, on emploie $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ ou $\tan^{-1}$, en mode degrés.

Aucun angle en jeu : ce n'est pas de la trigonométrie, c'est Pythagore.

Exercices corrigés : Trigonométrie : sinus, cosinus, tangente

1. Dans un triangle rectangle en A, quel côté est opposé à l'angle B ?

Correction :

Le côté AC : c'est celui qui est en face de l'angle B. Le côté AB, lui, touche l'angle B sans être l'hypoténuse — c'est l'adjacent.

2. Un angle aigu d'un triangle rectangle mesure 40° . Combien mesure l'autre ?

Correction :

50° . L'angle droit occupe 90° des 180° du triangle : il en reste 90 pour les deux angles aigus, et $90 - 40 = 50$.

3. On connaît le côté opposé et le côté adjacent, mais pas l'hypoténuse. Quel rapport employer ?

Correction :

La tangente : c'est la seule des trois qui relie l'opposé et l'adjacent sans passer par l'hypoténuse.

4. Sachant que $\sin(30^\circ) = 0,5$, que vaut $\cos(60^\circ)$?

Correction :

0,5 également. Les deux angles aigus se complètent : le sinus de l'un est le cosinus de l'autre.

5. Le cosinus d'un angle aigu peut-il valoir 1,2 ?

Correction :

Non. Le cosinus est le quotient de l'adjacent par l'hypoténuse, et l'hypoténuse est le plus long côté : le quotient est donc toujours inférieur à 1. Un tel résultat signale une erreur de calcul.

6. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 10 cm et le côté adjacent à l'angle θ mesure 5 cm. Combien vaut θ ?

Correction :

Adjacent et hypoténuse : c'est le cosinus. $\cos(\theta) = 5 / 10 = 0,5$, donc $\theta = \cos^{-1}(0,5) = 60^\circ$.